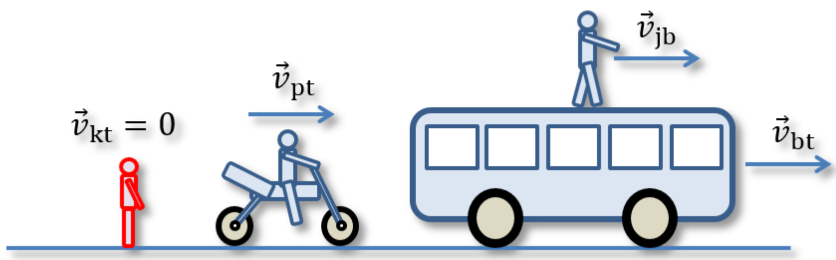
Soal Latihan Persiapan KSN-K Fisika 2022 SMAN 73 Jakarta

Oleh : Ahmad Basyir Najwan

Kinematika: Basic

1. Sebuah bis bergerak dengan kecepatan v_0 terhadap tanah. Di atas bis tersebut, Agen 007 atau yang akrab kita kenal dengan nama James Bond, berlari dengan kecepatan $3v_0$ relatif terhadap bis searah dengan gerakan bis. Ternyata, Agen James Bond dikejar seorang penjahat yang menaiki motor dengan kecepatan motor terhadap tanah adalah $2v_0$. Tuan Krab yang sedang diam di pinggir jalan sambil menghitung uang mengamati kejadian tersebut. Jika bis, Agen James Bond, dan si penjahat bergerak dengan kecepatan konstan, tentukanlah kecepetan Agen 007 menurut si penjahat dan menurut tuan Krab!



Solusi :

Kecepatan bis relatif tanah $= \vec{v}_{\mathrm{bt}} = v_0\hat{\imath}$

Kecepatan James Bond relatif bis $= \vec{v}_{\mathrm{jb}} = 3v_0\hat{\imath}$

Kecepatan penjahat relatif tanah $= \vec{v}_{\mathrm{pt}} = 2v_0\hat{\imath}$

Kecepatan tuan Krab relatif tanah $= \vec{v}_{\mathrm{kt}} = 0$

Kecepatan James Bond relatif $= \vec{v}_{\mathrm{jt}}$

$$\vec{v}_{\mathrm{jt}} = \vec{v}_{\mathrm{jb}} + \vec{v}_{\mathrm{bt}} = 3v_0\hat{\imath} + v_0\hat{\imath} \Longrightarrow \vec{v}_{\mathrm{jt}} = 4v_0\hat{\imath}$$

Kecepatan James Bond relatif penjahat $= \vec{v}_{\mathrm{jp}}$

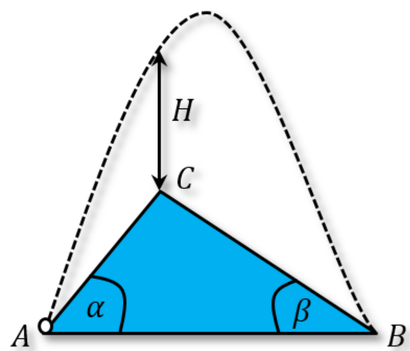
$$\vec{v}_{\mathrm{jp}} = \vec{v}_{\mathrm{jt}} + \vec{v}_{\mathrm{tp}} = \vec{v}_{\mathrm{jt}} - \vec{v}_{\mathrm{pt}} = 4v_0\hat{\imath} - 2v_0\hat{\imath} \Longrightarrow \vec{v}_{\mathrm{jp}} = 2v_0\hat{\imath}$$

Kecepatan James Bond relatif tuan Krab $= \vec{v}_{\mathrm{jk}}$

$$\vec{v}_{\mathrm{jk}} = \vec{v}_{\mathrm{jt}} + \vec{v}_{\mathrm{tk}} = \vec{v}_{\mathrm{jt}} - \vec{v}_{\mathrm{kt}} = 4v_0\hat{\imath} - 0 \Longrightarrow \vec{v}_{\mathrm{jk}} = 4v_0\hat{\imath}$$

Dari kasus di atas kita ketahui bahwa kecepatan suatu benda menurut pengamat yang diam terhadap suatu acuan lain yang diam akan sama dengan kecepatan benda tersebut terhadap acuan yang lain tadi. Dalam hal ini, acuan lain adalah tanah dan pengamat yang diam terhadap acuan lain ini adalah tuan Krab yang diam terhadap tanah. Maka kecepatan Agen 007 menurut tuan Krab akan sama dengan kecepatan Agen 007 terhadap tanah.

2. Sebuah peluru ditembakkan dari titik A ke titik B dimana titik A dan B merupakan titik-titik sudut alas suatu segitiga ABC (lihat gambar). Segitiga ABC sebidang dengan lintasan peluru. Lintasan peluru diketahui berjarak H dari titik C (titik puncak segitiga).



Jika diketahui sudut $\angle BAC$, sudut $\angle ABC$ dan jarak AB adalah L, tentukan:

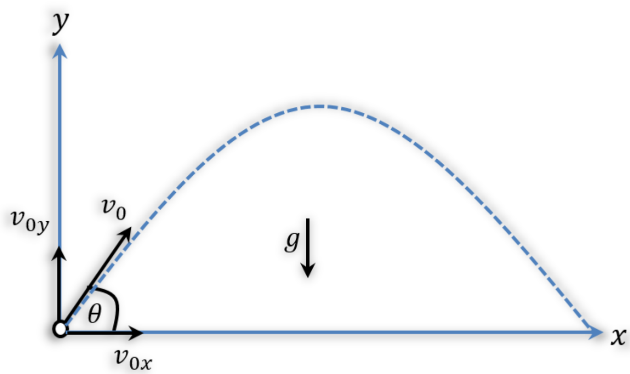
a. sudut elevasi ketika peluru ditembakkan.

b. laju awal peluru ketika ditembakkan jika $\alpha = \beta$

Nyatakan semua jawaban dalam H, L, α, dan β. **(OSK Fisika 2016)**

Solusi :

Soal ini akan mudah kita kerjakan jika kita mempunyai persamaan posisi peluru untuk arah vertikal y sebagai fungsi posisi peluru untuk arah horizontal x. Tapi karena kita tidak mempunyainya kita harus mencarinya sendiri. Kita jadikan posisi awal peluru sebagai titik asal sistem koordinat. Sudut θ adalah sudut elevasi peluru.



Komponen kecepatan peluru adalah

Arah horizontal → $v_{0x} = v_0 \cos\theta$

Arah vertikal → $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

Kita dapat menentukan persamaan posisi y dan x sebagai fungsi waktu dengan menggunakan persamaan GLBB pada arah y dan GLB pada arah x.

Untuk y ($y_0 = 0, v_{0y} = v_0 \sin\theta$, dan $a_y = -g$)

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + v_0 \sin\theta\, t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \ldots (1)$$

Untuk x ($x_0 = 0$ dan $v_{0x} = v_0 \cos\theta$)

$$x = x_0 + v_{0x}t = 0 + v_0 \cos\theta\, t$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \ldots (2)$$

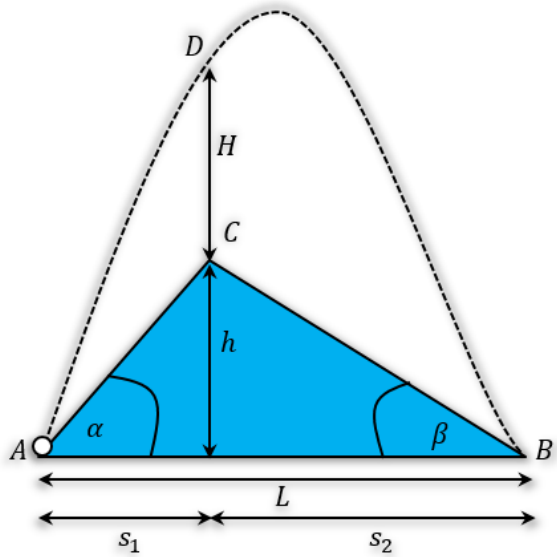
Subtitusi persamaan (2) ke (1)

$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} \ldots (3)$$

Persamaan (3) adalah persamaan posisi peluru untuk arah vertikal y sebagai fungsi posisi peluru untuk arah horizontal x

a. Sekarang kita perlu sedikit ilmu trigonometri untuk menentukan posisi peluru ketika di titik D dan B.



$$\tan\alpha = \frac{h}{s_1} \to s_1 = \frac{h}{\tan\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{h}{s_2} \to s_2 = \frac{h}{\tan\beta}$$

$$s_1 + s_2 = L$$

$$\frac{h}{\tan\alpha} + \frac{h}{\tan\beta} = L$$

$$\frac{h(\tan\beta + \tan\alpha)}{\tan\alpha\tan\beta} = L$$

$$h = \frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha}$$

$$s_1 = \frac{L\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha}$$

maka koordinat titik D dan B terhadap titik asal adalah

titik B $(L, 0)$

titik D $\left(\frac{L\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha}, \frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha} + H\right)$

subtitusi koordinat titik B ke persamaan (3)

$$0 = L\tan\theta - \frac{gL^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta}$$

$$\frac{gL}{{v_0}^2} = 2\cos^2\theta\tan\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$${v_0}^2 = \frac{gL}{2\sin\theta\cos\theta} \dots (4)$$

Subtitusi koordinat titik (D) dan persamaan (4) ke (3)

$$\frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha} + H = \frac{L\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}\tan\theta - \frac{g\left(\frac{L\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}\right)^2}{2\left(\frac{gL}{2\sin\theta\cos\theta}\right)\cos^2\theta}$$

$$\frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha} + H = \frac{L\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}\tan\theta - \left(\frac{\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}\right)^2 L\tan\theta$$

$$\frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha} + H = \frac{L\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}\tan\theta\left(1 - \frac{\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}\right)$$

$$\frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha} + H = \frac{L\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}\tan\theta\left(\frac{\tan\alpha}{\tan\beta+\tan\alpha}\right)$$

$$\frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha} + H = \frac{L\tan\alpha\tan\beta}{(\tan\beta+\tan\alpha)^2}\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{(\tan\beta+\tan\alpha)^2}{L\tan\alpha\tan\beta}\left(\frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha} + H\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(\tan\beta+\tan\alpha)^2}{L\tan\alpha\tan\beta}\left(\frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha} + H\right)\right]$$

b. Jika $\alpha = \beta$, maka $\tan\beta = \tan\alpha$

$$\tan\theta = \frac{(\tan\alpha+\tan\alpha)^2}{L\tan\alpha\tan\alpha}\left(\frac{L\tan\alpha\tan\alpha}{\tan\alpha+\tan\alpha} + H\right)$$

$$\tan\theta = \frac{4\tan^2\alpha}{L\tan^2\alpha}\left(\frac{L\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} + H\right)$$

$$\tan\theta = \frac{4}{L}\left(\frac{L}{2}\tan\alpha + H\right)$$

$$\tan\theta = 2\tan\alpha + \frac{4H}{L}$$

Kita turunkan sebuah rumus untuk menghubungkan $\tan\theta$ dalam $\sin\theta$ dan $\cos\theta$

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan^2\theta - \tan^2\theta\sin^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\tan^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta + \sin^2\theta$$

$$\tan^2\theta = (\tan^2\theta + 1)\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta + 1} \rightarrow \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta + 1} = \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

Maka

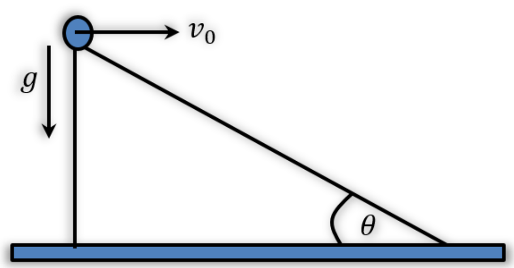
$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}}\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}} = \frac{\tan\theta}{\tan^2\theta + 1}$$

Sehingga kecepatan awal peluru adalah

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL(\tan^2\theta + 1)}{2\tan\theta}} = \sqrt{\frac{gL}{2}\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2}\left(2\tan\alpha + \frac{4H}{L} + \frac{L}{2L\tan\alpha + 4H}\right)}$$

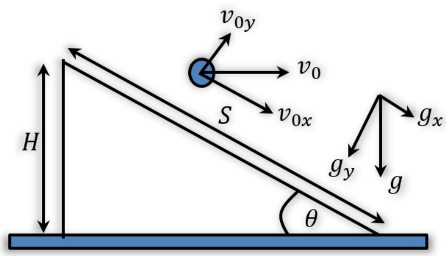
3. Sebuah bola dilemparkan dengan kecepatan$v_0$pada arah horizontal dari suatu puncak bukit yang memiliki sudut kemiringan θ terhadap horisontal. Setiap kali menumbuk permukaan bukit yang miring, tumbukan selalu bersifat elastik. Pada saat tumbukan ke n, bola tepat sampai di dasar bukit. Pe rcepatan g mengarah vertikal ke bawah.



   a. Tentukan tinggi bukit (dinyatakan dalam v_0, g, n, dan θ).
   b. Hitung ketinggian puncak bukit tersebut jika $\theta = 30^0, v_0 = 10$ m/s, $n = 10$ kali dan $g = 10$ m/s^2. **(OSP Fisika 2016)**

   Solusi :

   a. Misalkan tinggi bukit H. Perhatikan gambar di bawah ini!



Jadikan arah sejajar permukaan bukit sebagai arah sumbu x dan arah tegak lurusnya sebagai sumbu y.

Komponen kecepatan awal bola adalah

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Komponen percepatan gravitasi yang bekerja pada bola adalah

$$g_x = g \sin\theta$$

$$g_y = g \cos\theta$$

Persamaan kinematika gerak bola pada sumbu x dan y akan menjadi

$$v_x = v_{0x} + g_x t \Longrightarrow v_x = v_0 \cos\theta + g \sin\theta\, t$$

$$v_y = v_{0y} + g_y t \Longrightarrow v_y = v_0 \sin\theta - g \cos\theta\, t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} g_x t^2 \Longrightarrow x = x_0 + v_0 \cos\theta\, t + \frac{1}{2} g \sin\theta\, t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g_y t^2 \Longrightarrow y = y_0 + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g \cos\theta\, t^2$$

Kita tinjau dulu gerak bola dari saat awal ($y_0 = 0$) sampai akan menumbuk bukit ($y = 0$) untuk yang pertama kalinya ($n = 1$), selang waktu untuk kedua kondisi ini adalah

$$0 = 0 + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g \cos\theta\, t^2 \Longrightarrow t = \frac{2 v_0 \tan\theta}{g}$$

Kecepatan bola tepat ketika akan menumbuk bukit untuk yang pertama kalinya adalah

$$v_{1y} = v_0 \sin\theta - g \cos\theta \frac{2 v_0 \tan\theta}{g} \Longrightarrow v_{1y} = -v_0 \sin\theta$$

Karena tumbukan hanya terjadi pada arah tegak lurus permukaan bukit dan tumbukan yang terjadi bersifat elastis sempurna, maka bola hanya berbalik arah pada sumbu y. Materi ini akan kita bahas nanti ketika membicarakan tentang koefisien restitusi.

$$v'_{1y} = -v_{1y} = -(-v_0 \sin\theta) = v_0 \sin\theta = v_{0y}$$

Sesaat setelah tumbukan yang pertama, kecepatan bola pada sumbu y sama dengan kecepatan awal boal pada sumbu y. Artinya selang waktu antara tumbukan kedua dan ketiga juga akan sama dengan

$$t = \frac{2v_0 \tan\theta}{g}$$

Begitupan antara tumbukan ketiga dan keempat, keempat dan kelima, dan seterusnya.

Jadi selang waktu total dari saat bola dilemparkan sampai tumbukan ke n adalah

$$t_n = \frac{2nv_0 \tan\theta}{g}$$

Pada sumbu x, bola hanya mengalami gerak lurus berubah beraturan dipercepat, hal ini dikarenakan tumbukan antar bola dan bukit tidak memberikan efek pada gerak bola arah sumbu x. Tumbukan hanya terjadi pada sumbu y, sehingga gerakan pada sumbu x tidak terpengaruh. Maka panjang bukit dari puncak sampai dasarnya adalah (gunakan $x_0 = 0$, karena puncak bukit adalah titik acuan atau titik asal sistem koordinat kita)

$$S = x_0 + v_0 \cos\theta\, t_n + \frac{1}{2} g \sin\theta\, {t_n}^2$$

$$S = 0 + v_0 \cos\theta \frac{2nv_0 \tan\theta}{g} + \frac{1}{2} g \sin\theta \left(\frac{2nv_0 \tan\theta}{g}\right)^2$$

$$S = \frac{2n{v_0}^2 \tan\theta}{g} (\cos\theta + n \sin\theta \tan\theta)$$

$$S = \frac{2n{v_0}^2 \sin\theta}{g} (1 + n \tan^2\theta)$$

Maka tinggi bukit adalah

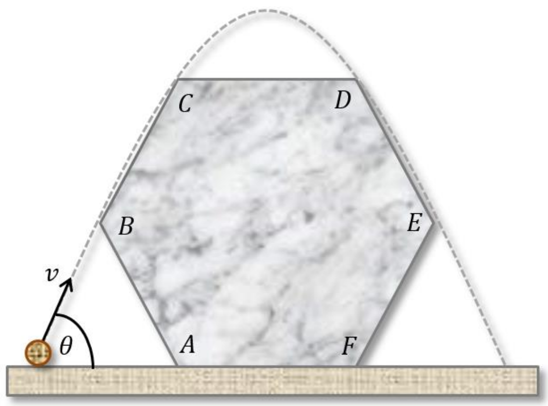
$$H = S \sin\theta \Longrightarrow H = \frac{2n{v_0}^2 \sin^2\theta}{g} (1 + n \tan^2\theta)$$

b. Dengan mensubtitusi $\theta = 30^0$, $v_0 = 10$ m/s, $n = 10$ kali, dan $g = 10$ m/s^2 akan kita dapatkan

$$H = \frac{2(10)(10)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{10}\left(1 + 10\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

$$H = 50\left(\frac{13}{3}\right) \Longrightarrow H = \frac{650}{3}\,\mathrm{m}$$

4. Sebuah pipa memiliki penampang berbentuk segienam sama sisi dengan panjang sisi L diletakkan di atas permukaan lantai mendatar. Pada gambar di bawah ditunjukan penampang pipa ABCDEF. Sebuah partikel dilemparkan ke atas dengan kelajuan v dengan sudut elevasi θ dari lantai. Posisi awal pelemparan di atur sesuai kebutuhan. Diketahui percepatan gravitasi adalah g dan arahnya ke bawah.



a. Tentukan v dan θ agar partikel melewati pipa tepat di titik B, C, D, dan E!

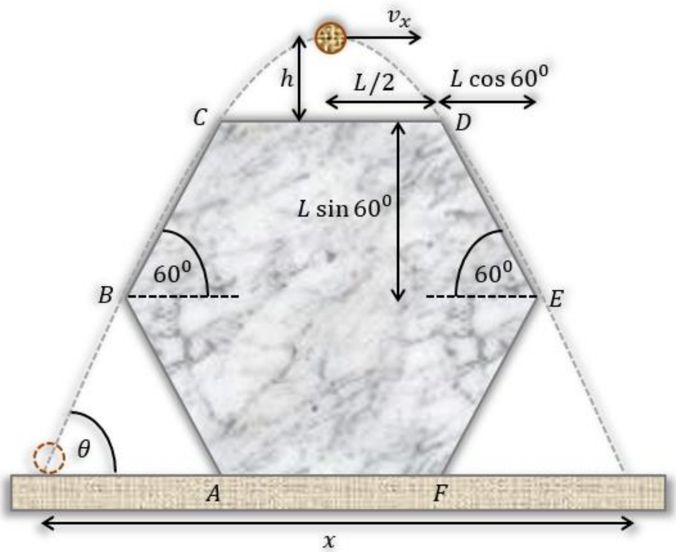
b. Tentukan jangkauan mendatar partikel yaitu jarak titik pelemparan dan titik jatuhnya kembali partikel pada lantai setelah melewati pipa!

(Seleksi APhO 2018)

Solusi :

a. Partikel akan mengalami gerak parabola. Karena percepatan gravitasi hanya ada pada arah vertikal sedangkan tidak ada percepatan pada partikel untuk arah horizontal, kecepatan partikel pada arah horizontal akan senantiasa konstan. Dengan kecepatan awal v, proyeksi kecepatan partikel pada arah horizontal adalah $v_x = v\cos\theta$. Sekarang kita tinjau kondisi saat partikel tepat di titik tertingginya. Saat partikel di posisi tertinggi ini kita tahu bahwa kecepatan partikel pada arah vertikal bernilai nol, artinya dia hanya bergerak pada arah horizontal di titik tertinggi ini.

Misalkan ketinggian partikel dari permukaan atas pipa saat di titik tertinggi adalah h (kita bisa dapatkan nilai ini). Perhatikan gambar berikut!



Gerak dari titik tertinggi ke titik D (misalkan waktu tempuhnya adalah t_1) akan kita peroleh untuk arah horizontal

$$\frac{L}{2} = v_x t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{L}{2v_x}$$

dan untuk arah vertikal

$$h = \frac{1}{2} g {t_1}^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{2v_x}\right)^2 = \frac{gL^2}{8{v_x}^2} \Longrightarrow h = \frac{gL^2}{8{v_x}^2} \dots (1)$$

Gerak dari titik tertinggi ke titik E (misalkan waktu tempuhnya adalah t_2) akan kita peroleh untuk arah horizontal

$$\frac{L}{2} + L\cos 60^0 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L = v_x t_2 \Longrightarrow t_2 = \frac{L}{v_x}$$

dan untuk arah vertikal

$$h + L \sin 60^0 = h + \frac{L}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} g {t_2}^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{v_x}\right)^2 = \frac{gL^2}{2{v_x}^2}$$

$$h + \frac{L}{2}\sqrt{3} = \frac{gL^2}{2{v_x}^2}$$

subtitusi persamaan (1)

$$\frac{gL^2}{8{v_x}^2}+\frac{L}{2}\sqrt{3}=\frac{gL^2}{2{v_x}^2}$$

$$\frac{L}{2}\sqrt{3}=\frac{4gL^2}{8{v_x}^2}-\frac{gL^2}{8{v_x}^2}=\frac{3gL^2}{8{v_x}^2}\Longrightarrow {v_x}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}gL$$

$$v_x=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}gL}\ \dots(2)$$

Maka nilai h akan kita peroleh dengan mensubtitusi ${v_x}^2$ ke persamaan (1)

$$h=\frac{gL^2}{8\left(\sqrt{3}/4\right)gL}\Longrightarrow h=\frac{1}{2\sqrt{3}}L$$

ingat bahwa $v_x=v\cos\theta$ sehingga persamaan (2) dapat kita ubah menjadi

$$v\cos\theta=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}gL}\ \dots(3)$$

Tinjau gerak dari lantai (saat pelemparan) sampai titik tertinggi (misalkan waktu tempuhnya adalah t_3) akan kita peroleh

$$v_y=v_{0y}-gt$$

Ingat saat di titik tertinggi kecepatan partikel arah vertikal nol dan kecepatan awal partikel pada arah vertikal adalah $v_{0y}=v\sin\theta$ sehingga

$$0=v\sin\theta-gt_3\Longrightarrow t_3=\frac{v\sin\theta}{g}$$

Tinjau persamaan posisi pada arah vertikal untuk gerakan dari lantai sampai tertinggi ini, akan kita peroleh

$$y=y_0+v_{0y}t_3-\frac{1}{2}g{t_3}^2$$

$$h+2L\sin 60^0=0+v\sin\theta\frac{v\sin\theta}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{v\sin\theta}{g}\right)^2$$

$$h+\sqrt{3}L=\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$$

subtitusi nilai h

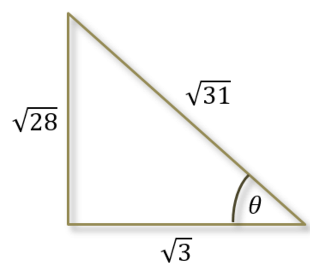
$$\frac{7}{6}\sqrt{3}L = \frac{v^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$v\sin\theta = \sqrt{\frac{7\sqrt{3}}{3}gL} \dots (4)$$

Bandingkan persamaan (4) dan (3)

$$\frac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = \frac{\sqrt{\left(7\sqrt{3}/3\right)gL}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}/4\right)gL}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{28}{3}} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{28}{3}}\right)$$



Dengan sedikit modifikasi trigonometri menggunakan segitiga berikut akan kita peroleh

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{28}{31}} \text{ dan } \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{31}}$$

Subtitusi ke persamaan (3)

$$v\sqrt{\frac{3}{31}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}gL} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{31\sqrt{3}}{12}gL}$$

b. Waktu tempuh total dari saat pelemparan sampai tiba kembali di lantai setelah melewaati pipa sama dengan $T = 2t_3$ (lihat simetri sistem) sehingga

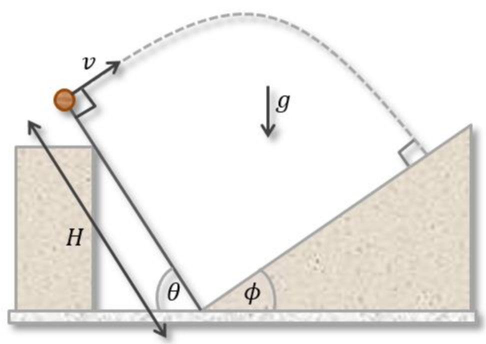
$$T = \frac{2v}{g}\sin\theta$$

Jarak jangkauan mendatar peluru menjadi

$$x = v_x T = \frac{2v^2}{g}\sin\theta\cos\theta$$

$$x = \frac{2}{g}\left(\frac{31\sqrt{3}}{12}gL\right)\left(\sqrt{\frac{28}{31}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{31}}\right) \Longrightarrow x = 31\sqrt{7}L$$

5. Sebuah papan yang kokoh dan cukup panjang di sandarkan pada sebuah balok yang tidak dapat bergerak dan ujung bawah batang diporos di atas lantai sehingga papan yang memiliki panjang H ini tidak dapat bergerak dan dia membentuk sudut θ dengan lantai. Di depan papan tersebut terdapat bidang miring dengan sudut kemiringan ϕ. Seseorang melemparkan bola kecil dari ujung atas batang secara tegak lurus dengan batang dan dia ingin bola ini mendarat secara tegak lurus pada bidang miring. Berapakan kecepatan v yang harus diberikan oleh orang ini? Percepatan gravitasi adalah g dan arahnya ke bawah.



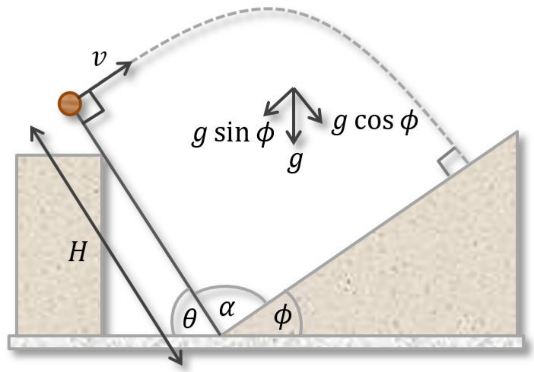
Solusi :

Untuk mempermudah analisis soal ini, kita gunakan sistem koordinat yang baru yaitu sumbu x sejajar bidang miring dan sumbu y tegak lurus bidang miring. Proyeksikan percepatan gravitasi pada kedua arah ini

$$a_x = -g\sin\phi$$

$$a_y = -g\cos\phi$$

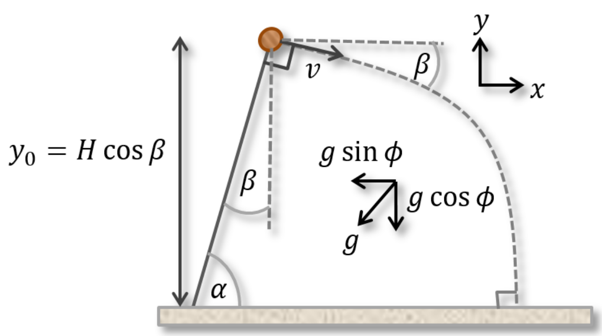
Perhatikan gambar di bawah ini



Dari gambar di atas kita peroleh

$$\theta + \alpha + \phi = \pi \Longrightarrow \alpha = \pi - (\theta + \phi) \ldots (1)$$

Gambar berikut adalah kondisi ketika kita pindah sistem koordinat seperti yang saya sebutkan pada bagian awal



Dari gambar di atas kita peroleh

$$\beta + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi \Longrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Subtitusi persamaan (1)

$$\beta = \frac{\pi}{2} - [\pi - (\theta + \phi)] \Longrightarrow \beta = -\left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \phi)\right]$$

Mengingat $\sin(-x) = -\sin x$ dan $\cos(-x) = \cos x$ akan kita peroleh

$$\sin\beta = -\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \phi)\right] \Longrightarrow \sin\beta = -\cos(\theta + \phi)$$

$$\cos\beta = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \phi)\right] \Longrightarrow \cos\beta = \sin(\theta + \phi)$$

Sehingga kita dapatkan

$$y_0 = H\cos\beta \Longrightarrow y_0 = H\sin(\theta + \phi)$$

$$v_{0x} = v\cos\beta \Longrightarrow v_{0x} = v\sin(\theta + \phi)$$

$$v_{0y} = -v\sin\beta \Longrightarrow v_{0y} = v\cos(\theta+\phi)$$

Saat bola jatuh tegak lurus pada bidang miring, berarti kecepatan bola arah sumbu x tepat saat menumbuk bidang miring bernilai nol, dari sini kita peroleh

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$0 = v\sin(\theta+\phi) - g\sin\phi\, t \Longrightarrow t = \frac{v\sin(\theta+\phi)}{g\sin\phi} \dots (2)$$

Tinjau gerak bola pada sumbu y. Tepat saat sampai di bidang miring, posisi $y = 0$ sehingga

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Subtitusi persamaan (2) dan data-data yang terkait

$$0 = H\sin(\theta+\phi) + v\cos(\theta+\phi)\frac{v\sin(\theta+\phi)}{g\sin\phi} - \frac{1}{2}g\cos\phi\left(\frac{v\sin(\theta+\phi)}{g\sin\phi}\right)^2$$

$$0 = H + \frac{v^2\cos(\theta+\phi)}{g\sin\phi} - \frac{v^2\sin(\theta+\phi)\cos\phi}{2\sin^2\phi}$$

$$H = \frac{v^2\sin(\theta+\phi)\cos\phi}{2g\sin^2\phi} - \frac{2v^2\cos(\theta+\phi)\sin\phi}{2g\sin^2\phi}$$

$$H = \frac{v^2}{2g\sin^2\phi}[\sin(\theta+\phi)\cos\phi - \cos(\theta+\phi)\sin\phi - \cos(\theta+\phi)\sin\phi]$$

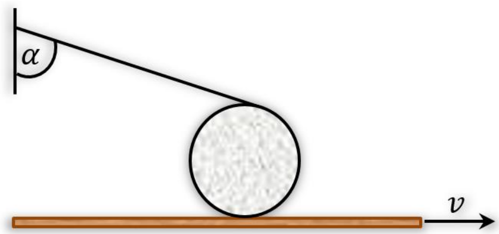
Ingat sifat $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$, akan kita peroleh

$$H = \frac{v^2}{2g\sin^2\phi}[\sin(\theta+\phi-\phi) - \cos(\theta+\phi)\sin\phi]$$

$$H = \frac{v^2}{2g\sin^2\phi}[\sin\theta - \cos(\theta+\phi)\sin\phi]$$

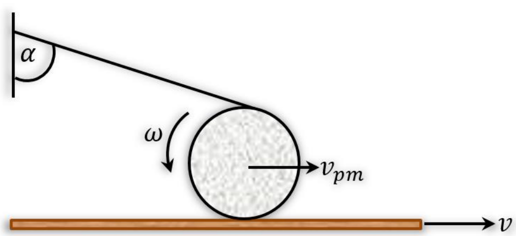
$$v^2 = \sin^2\phi\frac{2gH}{\sin\theta - \cos(\theta+\phi)\sin\phi} \Longrightarrow v = \sin\phi\sqrt{\frac{2gH}{\sin\theta - \cos(\theta+\phi)\sin\phi}}$$

6. Sebuah silinder dililit dengan benang kemudian benang ujung benang diikatkan ke dinding. Silinder berada di atas permukaan horizontal yang ditarik dengan kecepatan v (tegak lurus dengan sumbu silinder). Cari kecepatan sumbu silinder sebagai fungsi dari sudut α, yaitu sudut antara benang yang terulur dengan bidang vertikal. Silinder menggelinding di permukaan tanpa tergelincir. **(Jaan Kalda)**



Solusi :

Perhatikan gambar di bawah ini!



Kecepatan silinder relatif terhadap papan adalah

$$v_{rel} = v - v_{pm}$$

Kecepatan sudut silinder adalah

$$\omega = \frac{v_{rel}}{R} = \frac{v - v_{pm}}{R}$$

Silinder bisa di anggap menggelinding tanpa slip pada tali

$$v_{pm} \sin \alpha = \omega R = v - v_{pm}$$

$$v_{pm} + v_{pm} \sin \alpha = v$$

$$v_{pm}(1 + \sin \alpha) = v$$

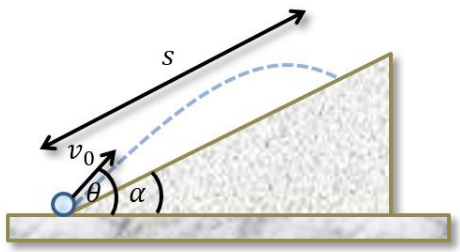
$$v_{pm} = \frac{v}{1 + \sin \alpha}$$

Jadi kecepatan sumbu silinder atau kecepatan pusat massanya sebagai fungsi sudut α adalah

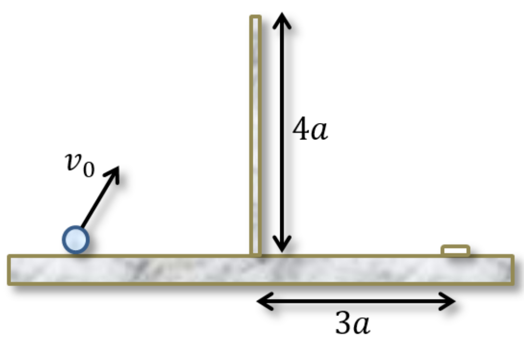
$$v_{pm} = \frac{v}{1 + \sin \alpha}$$

7. Pada soal ini akan dihitung berapa kecepatan minimum untuk menembak sebuah target yang berada di belakang sebuah tembok.

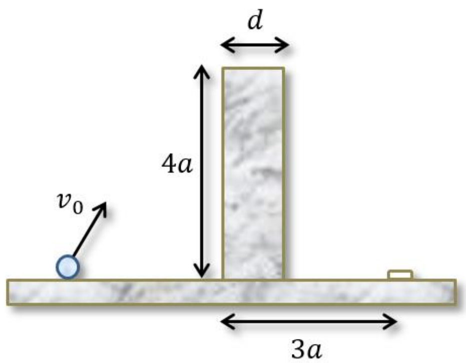
a. Pertama tinjau gerak benda ke sebuah bidang miring dengan sudut kemiringan α (lihat gambar di bawah). Sebuah benda ditembakkan dengan kecepatan awal v_0 membentuk sudut θ terhadap horizontal. Benda akan mengenai target pada jarak s sepanjang bidang miring pada nilai v_0 dan θ tertentu. Dapat dibuktikan bahwa besar kecepatan minimum adalah ${v_0}^2 = gs(a + b\sin\alpha + c\cos\alpha)$, dengan a, b, dan c adalah suatu konstanta tanpa dimensi. Tentukan nilai a, b, dan c tersebut!



b. Sekarang perhatikan ilustrasi di samping. sebuah target berada pada posisi $3a$ di sebelah kanan tembok setinggi $4a$. Ketebalan tembok pada bagian ini dapat diabaikan. Anda dapat menembak dari posisi manapun di sisi sebelah kiri tembok namun harus dari permukaan tanah. Tentukan besar kecepatan minimum agar dapat mengenai target. Sketsa bentuk lintasan benda.



c. Tinjau tembok dengan ketebalan d (lihat gambar di bawah). target berjarak $3a$ dari sisi kiri tembok.



Tentukan besar kecepatan minimum untuk mengenai target, sketasa bentuk lintasan benda jika

i. $d = a/2$

ii. $d = a$

(Seleksi AphO 2019 Australia)

Solusi :

a. Pada gerak parabola, untuk posisi x dan y kita mempunyai persamaan

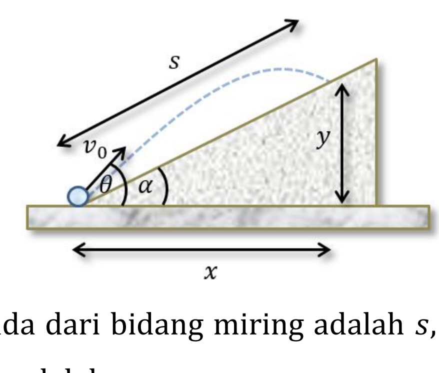
$$x = v_0 \cos\theta\, t$$

$$y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

dengan menggabungkan keduanya (kita hilangkan variabel t) akan kita peroleh hubungan antara x dan y yaitu

$$y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 {v_0}^2 \cos^2\theta}$$

Perhatikan gambar di bawah



Saat jarak jangkauan benda dari bidang miring adalah s, posisi x dan y saat benda menyentuh bidang miring adalah

$$x = s \cos\alpha$$

$$y = s \sin\alpha$$

Sehingga akan kita peroleh

$$s \sin\alpha = s \cos\alpha \tan\theta - \frac{gs^2 \cos^2\alpha}{2{v_0}^2 \cos^2\theta}$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha \tan\theta - \frac{gs \cos^2\alpha}{2{v_0}^2 \cos^2\theta}$$

$$2{v_0}^2 \cos^2\theta \sin\alpha = 2{v_0}^2 \sin\theta \cos\theta \cos\alpha - gs \cos^2\alpha$$

$$2{v_0}^2 \cos\theta\,(\sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha) = gs \cos^2\alpha$$

Gunakan kesamaan trigonometri $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$, akan kita peroleh

$$2{v_0}^2 \cos\theta \sin(\theta - \alpha) = gs \cos^2\alpha$$

$${v_0}^2 = \frac{gs \cos^2\alpha}{2 \cos\theta \sin(\theta - \alpha)}$$

Saat v_0 minimum, ${v_0}^2$ juga akan minimum dengan syarat

$$\frac{d{v_0}^2}{d\theta} = 0 \text{ dan } \frac{d^2{v_0}^2}{d\theta^2} > 0$$

Sehingga akan kita dapatkan

$$\frac{d{v_0}^2}{d\theta} = \frac{gs \cos^2\alpha}{2} \frac{d}{d\theta}[\cos\theta \sin(\theta - \alpha)]^{-1} = 0$$

$$0 = -[\cos\theta \sin(\theta - \alpha)]^{-2} \frac{d}{d\theta}[\cos\theta \sin(\theta - \alpha)]$$

$$0 = \frac{d}{d\theta}[\cos\theta \sin(\theta - \alpha)]$$

$$0 = -\sin\theta \sin(\theta - \alpha) + \cos\theta \cos(\theta - \alpha)$$

$$\cos\theta \cos(\theta - \alpha) - \sin\theta \sin(\theta - \alpha) = 0$$

Gunakan kesamaan trigonometri $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, akan kita peroleh

$$\cos(2\theta - \alpha) = 0$$

Karean sudut θ yang mungkin hanya berada di selang $0 < \theta < \pi/2$, solusi yang mungkin adalah

$$2\theta - \alpha = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

Maka

$$2\cos\theta\sin(\theta-\alpha) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)$$

$$2\cos\theta\sin(\theta-\alpha) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

Gunakan kesamaan trigonometri $2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$, akan kita peroleh

$$2\cos\theta\sin(\theta-\alpha) = \sin\frac{\pi}{2}+\sin(-\alpha)$$

$$2\cos\theta\sin(\theta-\alpha) = 1-\sin\alpha$$

Sehingga akan kita peroleh kecepatan minimum benda yaitu

$${v_0}^2 = \frac{gs\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$$

Sekarang gunakan identitas trigonometri $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$, akan kita peroleh

$${v_0}^2 = \frac{gs(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha}$$

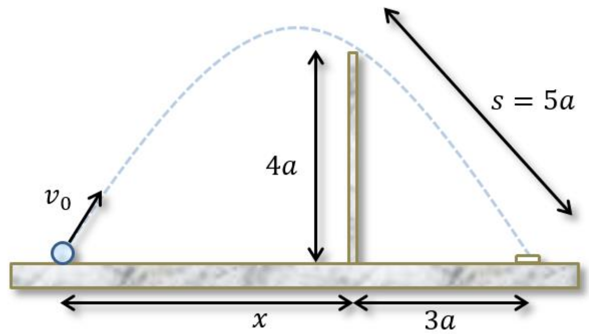
$${v_0}^2 = gs(1+\sin\alpha)$$

Dengan membandingkan kecepatan minimum di atas dengan bentuk yang diberikan soal yaitu

$${v_0}^2 = gs(a+b\sin\alpha+c\cos\alpha)$$

Akan kita peroleh bahwa $a=b=1$ dan $c=0$.

b. Soal bagian ini sebenarnya cukup sederhana, kita bisa menyelesaikannya dengan mudah menggunakan hasil yang telah kita dapat pada bagian (a) dan menggunakan sifat atau karakteristik yang unik dari gerak parabola. Ingat bahwa kita bisa melemparkan benda dari titik manapun pada sisi sebelah kiri tembok asal dari permukaan lantai. Karena lintasan gerak parabola simetri, untuk mencari kecepatan minimum bisa kita tinjau kondisi saat kita melemparkan benda dari target melewati tembok ke titik pelemparan di sisi sebelah kiri tembok. Hal ini boleh kita lakukan karena lintasannya simetri. Apakah titik tertinggi dari lintasan benda adalah puncak tembok? Jawaban adalah tidak, karena ini bergantung pada sudut pelemparan benda nantinya, tapi kita bisa menemukan kecepatan minimum benda agar bisa melewati tembok dan mencapai target. Perhatikan lintasan gerak benda berikut!



Lintasan warna biru adalah lintasan benda yang dilempar dan melakukan gerak parabola. Karena kecepatan dibuat minimum dan tembok tipis (ketebalannya dapat diabaikan), benda akan tepat melewati titik tertinggi tembok. Seperti yang saya bilang sebelumnya, proses ini bisa kita balik, yaitu melempar bola dari target ke posisi pelemparannya seharusnya, maka ini analog dengan kasus bagian (a) yaitu melempar benda pada bidang miring dengan panjang lintasan minimum s adalah

$$s = \sqrt{3a^2 + 4a^2} \Longrightarrow s = 5a$$

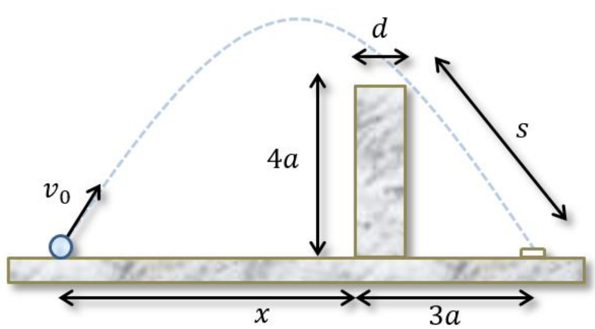
Kemudian akan kita peroleh pula untuk kasus ini

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

Sehingga kecepatan minimum benda pada kasus ini adalah

$${v_0}^2 = g(5a)\left(1 + \frac{4}{5}\right) \Longrightarrow v_0 = 3\sqrt{ga}$$

c. Kita gunakan cara seperti bagian (b) namun sekarang ketebalan tembok tidak bisa kita abaikan. Lintasan gerak benda adalah seperti berikut!



Karena kecepatan dibuat minimum, benda akan tepat melewati titik sudut bagian kanan atas tembok. Seperti sebelumnya, dari kesimetrian, kita bisa gunakan proses pelemparan bola dari target menuju ke posisi pelemparan yang seharusnya untuk mendapatkan kecepatan minimum benda. Seperti bagian sebelumnya, menggunakan hasil bagian (a) nantinya, nilai s di sini adalah

$$s = \sqrt{(3a - d)^2 + (4a)^2}$$

untuk masing-masing sub kasus akan kita peroleh

$$\text{untuk } d = \frac{a}{2} \Longrightarrow s = \frac{\sqrt{89}}{2} a \text{ dan } \sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

$$\text{untuk } d = a \Longrightarrow s = 2\sqrt{5}a \text{ dan } \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

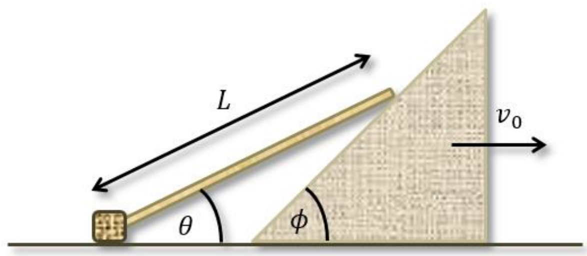
sehingga kecepatan minimum untuk masing-masing sub kasus adalah

$$\text{untuk } d = \frac{a}{2} \Longrightarrow {v_0}^2 = g\left(\frac{\sqrt{89}}{2}a\right)\left(1 + \frac{8}{\sqrt{89}}\right) \Longrightarrow v_0 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{89}}{2} + 4\right)ga}$$

$$\text{untuk } d = a \Longrightarrow {v_0}^2 = g\left(2\sqrt{5}a\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Longrightarrow v_0 = \sqrt{\left(2\sqrt{5} + 4\right)ga}$$

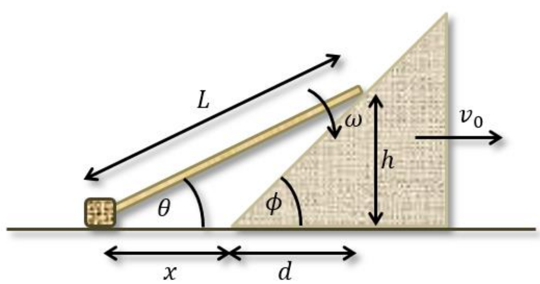
Kinematika dan Koordinat: Improved Skill in Calculus

1. Sebuah batang dengan panjang L di poros di atas lantai pada salah satu ujungnya. Ujung batang yang lain di letakkan pada sisi miring dari sebuah bidang miring yang memiliki sudut kemiringan ϕ. Asumsikan permukaan lantai dan bidang miring serta poros batang licin sempurna. Jika bidang miring bergerak ke kanan dengan kecepatan v_0 yang konstan dan sudut yang dibentuk oleh batang dengan lantai adalah θ, tentukan kecepatan sudut batang sebagai fungsi θ!



Solusi :

Pertama kita tentukan dulu titik asal sistem koordinat. Untuk mempermudah saya pilih poros rotasi tongkat sebagai titik asal atau acuan. Berikutnya kita cari hubungan antara posisi bidang miring dan tongkat, yaitu hubungan antara x dan θ. Perhatikan gambar berikut



Dari geometeri sistem kita peroleh

$$h = L\sin\theta$$

$$d = h\cot\phi$$

Dari kedua permsaan di atas akan kita peroleh

$$d = L\sin\theta\cot\phi$$

Berikutnya akan kita peroleh pula

$$x + d = L\cos\theta$$

Subtitusi hasil sebelumnya

$$x + L\sin\theta\cot\phi = L\cos\theta$$
$$x = L(\cos\theta - \sin\theta\cot\phi)$$

Sekarang turunkan kedua ruas terhadap waktu, ingat yang berubah hanyalah x dan θ, parameter ϕ dan L bernilai konstan sehingga

$$\frac{dx}{dt} = L\frac{d}{dt}(\cos\theta - \sin\theta\cot\phi)$$
$$\frac{dx}{dt} = L\left(\frac{d\cos\theta}{dt} - \frac{d\sin\theta}{dt}\cot\phi\right)$$
$$\frac{dx}{dt} = L\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cot\phi\right)$$
$$\frac{dx}{dt} = -L(\sin\theta + \cos\theta\cot\phi)\frac{d\theta}{dt}$$

Kecepatan bidang miring sama untuk setiap bagiannya, sehingga $dx/dt = v_0$. Selanjutnya perhatikan bahwa arah bertambahnya sudut θ berlawanan dengan arah ω sehingga $\omega = -d\theta/dt$

$$v_0 = -L(\sin\theta + \cos\theta\cot\phi)(-\omega)$$
$$v_0 = L\left(\sin\theta + \frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin\phi}\right)\omega$$
$$v_0 = L\left(\frac{\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi}{\sin\phi}\right)\omega$$

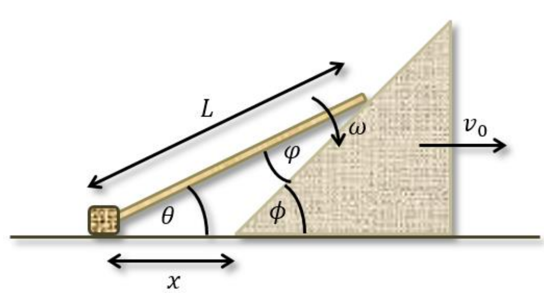
Dari kesamaan trigonometri akan kita peroleh

$$\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi = \cos(\theta - \phi) = \cos(\phi - \theta)$$

Sehingga

$$v_0 = L\left(\frac{\cos(\phi - \theta)}{\sin\phi}\right)\omega \Longrightarrow \omega = \frac{v_0\sin\phi}{L\cos(\phi - \theta)}$$

Kita juga bisa menentukan hubungan x dan θ dengan metode yang lainnya yaitu aturan sinus. Perhatikan segitiga yang dibentuk sistem



Dari aturan sinus dapat kita peroleh bahwa

$$\frac{L}{\sin(\pi - \phi)} = \frac{x}{\sin \varphi}$$

Jumlah sudut segitiga haruslah sama dengan π radian sehingga

$$\pi = \theta + (\pi - \phi) + \varphi$$

$$\varphi = \phi - \theta$$

Dan kita juga tahu bahwa

$$\sin(\pi - \phi) = \sin \pi \cos \phi - \sin \phi \cos \pi = \sin \phi$$

Sehingga

$$\frac{L}{\sin \phi} = \frac{x}{\sin(\phi - \theta)}$$

$$x = \frac{L \sin(\phi - \theta)}{\sin \phi}$$

Turunkan kedua sisi terhadap waktu akan kita peroleh

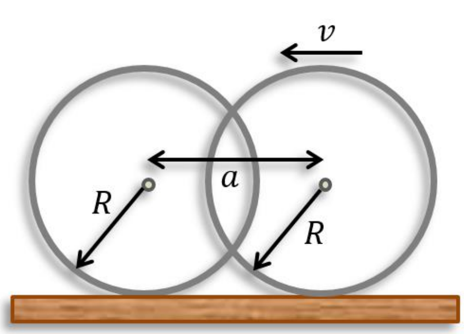
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{L \cos(\phi - \theta)}{\sin \phi} \frac{d\theta}{dt}$$

Dengan menggunakan $v_0 = dx/dt$ dan $\omega = -d\theta/dt$ kita dapatkan

$$v_0 = L\left(\frac{\cos(\phi - \theta)}{\sin \phi}\right)\omega \Longrightarrow \omega = \frac{v_0 \sin \phi}{L \cos(\phi - \theta)}$$

Sama seperti hasil sebelumnya

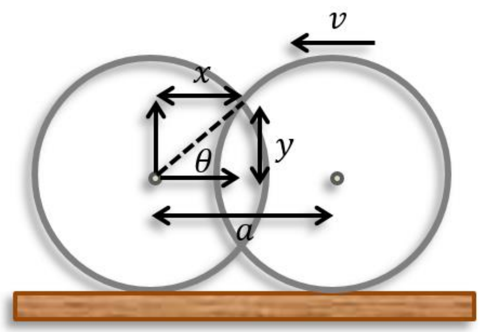
2. Pada soal di bawah ini, satu dari dua cincin dengan jari-jari R diam, sedangkan cincin yang lain bergerak pada kecepatan v menuju yang pertama. Tentukan kecepatan pada titik potong atas yang tergantung pada a, yaitu jarak antara pusat-pusat cincin!



Petunjuk : Tentukan titik asal koordinat sistem (pilih titik yang diam), kemudian tentukan posisi titik potong dan pusat massa cincin yang bergerak, gunakan diferensial untuk menentukan hubungan antar kecepatannya **(Jaan Kalda)**

Solusi :

Kita jadikan pusat massa cincin kiri sebagai titik asal sistem koordinat kartesius dua dimensi. Perhatikan gambar di bawah



Posisi titik potong adalah

$$\vec{r}_p = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_p = R\cos\theta\,\hat{\imath} + R\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_p = R(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$$

Turunkan terhadap waktu

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{v}_p = R\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{v}_p = R(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})\frac{d\theta}{dt}$$

Sekarang tinjau posisi cincin yang bergerak

$$\vec{r}_c = a\hat{\imath}$$

dari simetri sistem kita tahu bahwa $a = 2x$ dan karena $x = R\cos\theta$, akan kiat peroleh

$$\vec{r}_c = 2R\cos\theta\,\hat{\imath}$$

Turunkan terhadap waktu

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c = -2R\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath}$$

Kita tahu bahwa cincin kanan bergerak ke kiri dengan kecepatan v sehingga

$$\vec{v}_c = -v\hat{\imath} = -2R\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath}$$

$$v = 2R\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{2R\sin\theta}$$

Sehingga kecepatan titik potong kedua cincin adalah

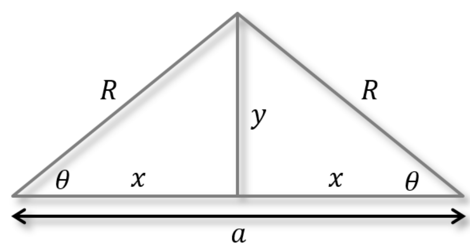
$$\vec{v}_p = R(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})\frac{v}{2R\sin\theta}$$

$$\vec{v}_p = \frac{v}{2}\left(-\hat{\imath} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\jmath}\right) \Longrightarrow \vec{v}_p = \frac{v}{2}(-\hat{\imath} + \cot\theta\,\hat{\jmath})$$

dan besarya adalah

$$\left|\vec{v}_p\right| = v_p = \frac{v}{2}\sqrt{1+\cot^2\theta} \Longrightarrow v_p = \frac{v}{2\sin\theta}$$

Sekarang perhatikan segitiga yang dibentuk oleh kedua cincin



Karena $x = a/2$ akan kita peroleh

$$\cos\theta = \frac{a/2}{R} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{a}{2R}$$

Maka

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$$

Sehingga

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{a/2R}{\sqrt{4R^2-a^2}/2R} \Longrightarrow \cot\theta = \frac{a}{\sqrt{4R^2-a^2}}$$

Maka kecepatan titik potong kedua cincin adalah

$$\vec{v}_p = \frac{v}{2}\left(-\hat{\imath} + \frac{a}{\sqrt{4R^2-a^2}}\hat{\jmath}\right)$$

dan besarnya adalah

$$v_p = \frac{vR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$$