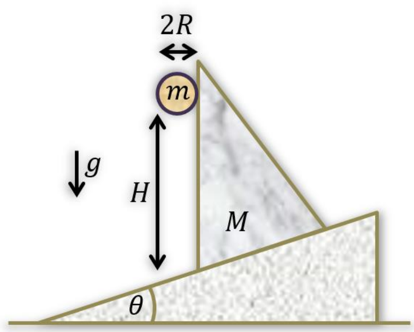
Soal Latihan Persiapan KSN-K Fisika 2022 SMAN 73 Jakarta

Oleh : Ahmad Basyir Najwan

Dinamika: Aplikasi Hukum Newton 2

1. Sebuah bidang miring licin dengan sudut kemiringin θ di tempelkan di atas lantai sehingga tidak dapat bergerak. Sebuah prisma bermassa M di letakkan di atas bidang miring dimana salah satunya sisinya tepat dalam kondisi vertikal. Pada sisi prisma yang vertikal ini di letakkan sebuah bola berjari-jari R. Gaya gesek antara bola dan prisma sangat besar sehingga bola akan menggelinding tanpa slip terhadap prisma. Pada awalnya, sistem diam dan permukaan bawah bola berada pada jarak H dari permukaan bawah prisma yang vertikal. Berikut diagram sistem bola-prisma-bidang miring tersebut.



Sistem kemudian dilepaskan begitu saja sehingga mulai bergerak.

a. Tentukan persamaan gerak bola dan prisma!

b. Tentukan percepatan prisma a_2! Nyatakan dalam M, m, g, dan θ.

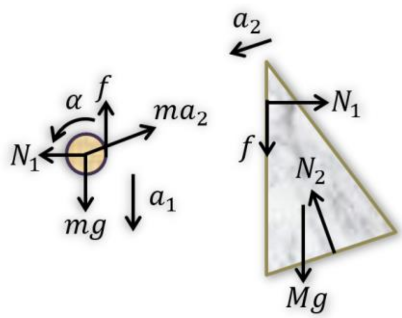
c. Tentukan percepatan sudut α dan percepatan bola terhadap prisma a_1! Nyatakan dalam M, m, g, R, dan θ.

d. Setelah sistem dilepas, kapan bola menyentuh bidang miring t dan berapa kecepatannya saat akan menumbuk bidang miring! Asumsikan lintasan bidang miring cukup panjang sehingga bola akan lebih dulu mencapai permukaan bidang miring dibanding prisma sampai ke lantai. Kecepatan dan waktu t bola bisa anda nyatakan dalam a_1, a_2, H, dan θ.

(TO Pra OSK 2019 Sainsworld)

Solusi :

a. Untuk bola, agar lebih mudah kita gunakan kerangka acuan relatif prisma. Karena prisma dipercepat, bola akan mendapat gaya fiktif yang arahnya berlawanan dengan arah percepatan prisma dan besarnya sama dengan massa bola di kali percepatan prisma. Untuk prisma, kita tinjau kerangka lantai. Berikut diagram gaya pada bola dan prisma.



Hukum II Newton

Untuk Bola : Gerak translasi arah vertikal (kerangka acuan prisma), misalkan percepatan bola relatif prisma pada arah ini adalah a_1, maka

$$\sum F_{\mathrm{v}} = ma_1$$

$$mg - ma_2 \sin\theta - f = ma_1$$

$$mg - f = ma_1 + ma_2 \sin\theta \ldots (1)$$

Untuk Bola : Gerak translasi arah horizontal (kerangka acuan prisma), pada arah ini bola tidak dipercepat

$$\sum F_{\mathrm{h}} = 0$$

$$ma_2 \cos\theta - N_1 = 0$$

$$N_1 = ma_2 \cos\theta \ldots (2)$$

Untuk Bola : Gerak rotasi terhadap pusat massa bola, misalkan percepatan sudut bola adalah α

$$\sum \tau = I\alpha$$

Ingat bahwa momen inersia bola $I = (2/5)mR^2$ dan karena bola menggelinding tanpa slip akan berlaku $a_1 = \alpha R$, sehingga

$$fR = \frac{2}{5}mR^2\frac{a_1}{R} \Longrightarrow f = \frac{2}{5}ma_1 \dots (3)$$

Untuk Prisma : Gerak translasi arah sejajar bidang miring, misalkan percepatan prisma adalah a_2, maka

$$\sum F_{\parallel} = Ma_2$$

$$Mg\sin\theta + f\sin\theta - N_1\cos\theta = Ma_2 \dots (4)$$

b. Subtitusi persamaan (3) ke (1)

$$mg - \frac{2}{5}ma_1 = ma_1 + ma_2\sin\theta$$

$$mg - ma_2\sin\theta = \frac{7}{5}ma_1$$

$$g - a_2\sin\theta = \frac{7}{5}a_1 \Longrightarrow a_1 = \frac{5}{7}g - \frac{5}{7}a_2\sin\theta \dots (5)$$

Subtitusi persmaan (5) ke (3)

$$f = \frac{2}{5}m\left(\frac{5}{7}g - \frac{5}{7}a_2\sin\theta\right) \Longrightarrow f = \frac{2}{7}mg - \frac{2}{7}ma_2\sin\theta \dots (6)$$

Subtitusi persamaan (2) dan (6) ke (4)

$$Mg\sin\theta + \left(\frac{2}{7}mg - \frac{2}{7}ma_2\sin\theta\right)\sin\theta - (ma_2\cos\theta)\cos\theta = Ma_2$$

$$7Mg\sin\theta + 2mg\sin\theta - 2ma_2\sin^2\theta - 7ma_2\cos^2\theta = 7Ma_2$$

$$7Mg\sin\theta + 2mg\sin\theta = 7Ma_2 + 7ma_2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 5ma_2\sin^2\theta$$

$$(7M + 2m)g\sin\theta = 7Ma_2 + 7ma_2 - 5ma_2\sin^2\theta$$

$$(7M + 2m)g\sin\theta = [7(M + m) - 5m\sin^2\theta]a_2$$

$$a_2 = \frac{(7M + 2m)g\sin\theta}{7(M + m) - 5m\sin^2\theta}$$

c. Subtitusi a_2 ke persamaan (5)

$$a_1 = \frac{5}{7}(g - a_2 \sin\theta)$$

$$a_1 = \frac{5}{7}\left(g - \frac{(7M + 2m)g\sin\theta}{7(M+m) - 5m\sin^2\theta}\sin\theta\right)$$

$$a_1 = \frac{5}{7}\left(\frac{7(M+m) - 5m\sin^2\theta - (7M+2m)\sin^2\theta}{7(M+m) - 5m\sin^2\theta}\right)g$$

$$a_1 = \frac{5}{7}\left(\frac{7M(1-\sin^2\theta) - 7m(1-\sin^2\theta)}{7(M+m) - 5m\sin^2\theta}\right)g$$

$$a_1 = \frac{5(M-m)g\cos^2\theta}{7(M+m) - 5m\sin^2\theta}$$

Dari gerak menggelinding tanpa slip bola akan kita peroleh

$$\alpha = \frac{a_1}{R} \Longrightarrow \alpha = \frac{5(M-m)g\cos^2\theta}{[7(M+m) - 5m\sin^2\theta]R}$$

d. Relatif terhadap prisma, saat bola mencapai bidang miring, dia telah turun secara vertikal sejauh H. Dengan menggunakan persamaan gerak GLBB dipercepat akan kita peroleh

$$H = \frac{1}{2}a_1 t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{a_1}}$$

Terhadap prisma, percepatan bola berarah vertikal ke bawah yang besarnya adalah

$$v_{\mathrm{v}}{}^2 = 2a_1 H \Longrightarrow v_{\mathrm{v}} = \sqrt{2a_1 H}$$

Saat bola sampai di bidang miring, prisma memiliki kecepatan yang arahnya sejajar bidang miring dengan besar

$$v_{\parallel} = a_2 t = a_2\sqrt{\frac{2H}{a_1}}$$

Sehingga kecepatan bola saat akan menumbuk bidang miring adalah

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{v}} + \vec{v}_{\parallel}$$

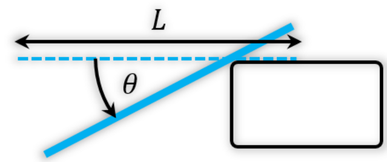
Vektor v_{v} dan $v_{\parallel}$ membentuk sudut $\phi = \pi/2 - \theta$ sehingga besar kecepatan bola v adalah

$$v = \sqrt{{v_{\text{v}}}^2 + {v_{\parallel}}^2 + 2v_{\parallel}v_{\text{v}}\cos\phi}$$

Ingat kesamaan trigonometri $\cos(\pi/2\ - \theta) = \sin\theta$ sehingga

$$v = \sqrt{2a_1H + \frac{2a_2H}{a_1}(a_2 + 2a_1\sin\theta)}$$

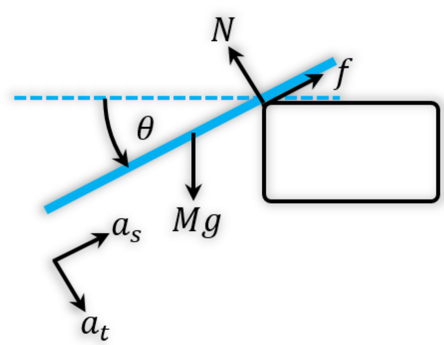
2. Perhatikan gambar di bawah!



Sebuah batang tipis homogen bermassa M diletakkan horizontal di ujung meja sehingga seperempat panjang batang terletak di atas meja. Batang kemudian dilepaskan tanpa. kecepatan awal sehingga mulai berotasi terhadap tepi meja. Pada sudut θ berapakah batang mulai slip terhadap meja? Diketahui koefisien gesek statik antara batang dengan meja adalah μ. **(Binovatif)**

Solusi :

Berikut diagram gaya yang bekerja pada tongkat!



Pada tongkat akan bekerja tiga buah gaya yaitu gaya normal dari pojokan meja yang arahnya selalu tegak lurus tongkat, gaya gesek statik dari pojokan meja yang arahnya sejajar tongkat dan cenderung menahan tongkat agar tidak jatuh, dan gaya berat yang arahnya selalu ke bawah. Karena sudut θ berubah-ubah, besar N dan f tidak konstan. Pusat massa batang yang berjarak $L/4$ dari titik sentuh batang dengan pojokan meja akan memiliki percepatan sentripetal yang arahnya selalu menuju pojokan meja dan percepatan tangensial yang arah selalu tegak lurus dengan dengan percepatan sentripetal.

Menggunakan Hukum II Newton untuk gerakan tongkat

Arah radial

$$f - Mg\sin\theta = Ma_s$$

$$f = Mg\sin\theta + Ma_s \dots (1)$$

Arah tangensial

$$Mg\cos\theta - N = Ma_t$$

$$N = Mg\cos\theta - Ma_t \dots (2)$$

Terhadap pojokan meja, batang memiliki percepatan sudut α dan juga kecepatan sudut ω yang keduanya ini berubah-ubah sebagai fungsi θ.

Hubungan percepatan sentripetal dengan ω dan percepatan tangensial dengan α adalah

$$a_s = \frac{1}{4}\omega^2 L \text{ dan } a_t = \frac{1}{4}\alpha L$$

Momen inersia batang terhadap pojokan meja adalah (gunakan teorema sumbu sejajar)

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 \Longrightarrow I = \frac{7}{48}ML^2$$

Untuk mendapatkan α sebagai fungsi θ kita tinjau gerak rotasi batang

$$\sum \tau_{\text{ekt}} = I\alpha$$

$$Mg\cos\theta\frac{L}{4} = \left(\frac{7}{48}ML^2\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{12g}{7L}\cos\theta$$

Kita bisa mencari ω sebagai fungsi θ dengan dari hukum kekekalan energi, jadikan permukaan meja sebagai acuan energi potensial sama dengan nol.

$$EM_i = EM_f$$

$$0 = -mgh + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$0 = -mg\frac{L}{4}\sin\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{48}ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{24g}{7L}\sin\theta$$

Namun karena kita belum mempelajarinya pada bab ini, kita gunakan cara lain. Ingat bahwa $\alpha = d\omega/dt$ sehingga

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

maka

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{12g}{7L}\cos\theta$$

$$\omega d\omega = \frac{12g}{7L}\cos\theta\, d\theta$$

Saat awal atau saatu $\theta = 0$, batang masih diam ($\omega = 0$) sehingga

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{12g}{7L}\int_0^\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$\left[\frac{\omega^2}{2}\right]_0^\omega = \frac{12g}{7L}[\sin\theta]_0^\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{12g}{7L}\sin\theta \Longrightarrow \omega^2 = \frac{24g}{7L}\sin\theta$$

sehingga

$$a_s = \frac{1}{4}\omega^2 L = \frac{6}{7}g\sin\theta$$

$$a_t = \frac{1}{4}\alpha L = \frac{3}{7}g\cos\theta$$

Subtitusi a_s dan a_t ke persamaan (1) dan (2)

$$f = Mg\sin\theta + M\frac{6}{7}g\sin\theta = \frac{13}{7}Mg\sin\theta$$

$$N = Mg\cos\theta - M\frac{3}{7}g\cos\theta = \frac{4}{7}Mg\cos\theta$$

Hubungan gaya gesek kinetik dengan dengan gaya normal adalah

$$f \leq \mu N$$

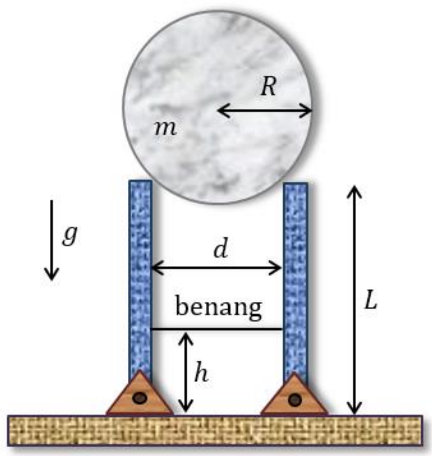
Batang mulai slip ketika gaya gesek statik bernilai maksimum

$$f = \mu N$$

$$\frac{13}{7} Mg \sin\theta = \mu \frac{4}{7} Mg \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{4\mu}{13} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{4\mu}{13}\right)$$

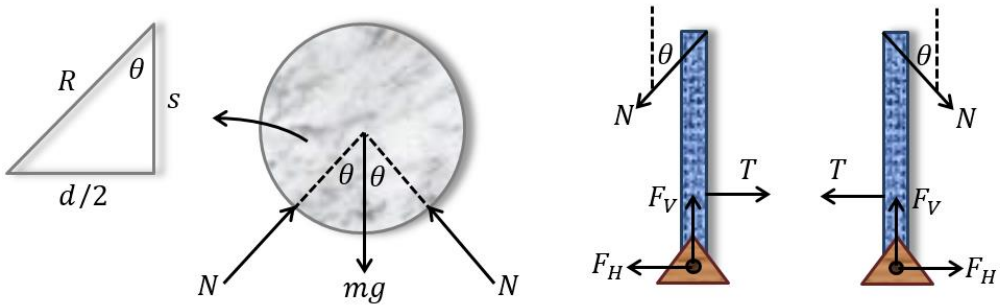
3. Sebuah bola bermassa m dan radius R diam di atas dua buah tongkat vertikal tak bermassa sepanjang L yang terporos di lantai seperti pada gambar. Kedua tongkat terpisah sejauh d dan ditahan oleh benang mendatar pada ketinggian h dari lantai. Tidak ada gesekan antara bola dan tongkat. Sistem berada dalam kesetimbangan.



   a. Gambarkan diagram gaya bebas pada bola dan tongkat serta tentukan besar gaya yang diberikan masing-masing tongkat pada bola dan gaya tegang pada benang!
   b. Tentukan besar gaya horizontal dan vertikal yang diberikan poros pada masing-masing tongkat!
   c. Jika benang putus, tentukan percepatan angular tongkat terhadap poros sesaat setelah benang putus dengan mengasumsikan momen inersia tongkat terhadap poros adalah I_p! **(Klinik Olimpiade Fisika @klinikfiskapku)**

   Solusi :

   a. Berikut diagram gaya pada bola dan tongkat.



Dari geometri

$$s = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{d}{2R} \text{ dan } \cos\theta = \frac{\sqrt{4R^2 - d^2}}{2R} \text{ serta } \tan\theta = \frac{d}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

Bola : Hukum I Newton untuk gerak translasi

$$\sum F_y = 0$$

$$2N\cos\theta - mg = 0$$

Subtitusi nilai $\cos\theta$ didapat

$$2N\frac{\sqrt{4R^2 - d^2}}{2R} - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mgR}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

Tongkat : Hukum I Newton untuk gerak rotasi (terhadap poros), cukup tinjau salah satu tongkat saja karena keduanya simetri

$$\sum \tau_p = 0$$

$$N\sin\theta\, L - Th = 0$$

$$\frac{mgR}{\sqrt{4R^2 - d^2}}\frac{d}{2R}L = Th \Rightarrow T = \frac{mgdL}{2h\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

b. Tongkat : Hukum I Newton untuk gerak translasi, cukup tinjau salah satu tongkat saja karena keduanya simetri, dalam hal ini saya pilih tongkat kanan

$$\sum F_y = 0$$

$$F_V - N\cos\theta = 0$$

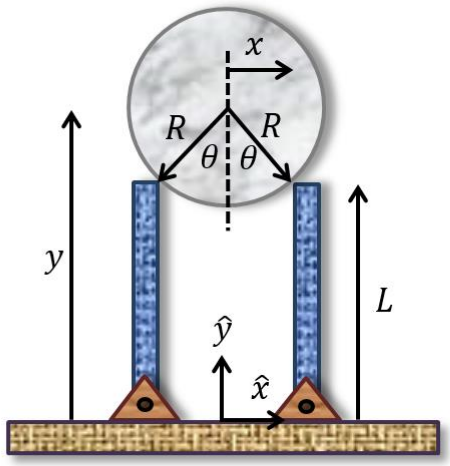
$$F_V - \frac{mgR}{\sqrt{4R^2 - d^2}}\frac{\sqrt{4R^2 - d^2}}{2R} = 0 \Rightarrow F_V = \frac{1}{2}mg$$

$$\sum F_x = 0$$

$$T - N\sin\theta - F_H = 0$$

$$F_H = \frac{mgdL}{2h\sqrt{4R^2 - d^2}} - \frac{mgR}{\sqrt{4R^2 - d^2}}\frac{d}{2R} \Longrightarrow F_H = \frac{mgd(L-h)}{2h\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

c. Di sini kita perlu sedikit berhati-hati. Pertama kita cari hubungan percepatan turun bola dengan percepatan sudut tongkat.



Dari gambar kita peroleh

$$x = R\sin\theta$$

$$y = L + R\cos\theta$$

Turunkan satu kali terhadap waktu

$$\dot{x} = R\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y} = -R\dot{\theta}\sin\theta$$

Turunkan satu kali lagi terhadap waktu

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\ddot{y} = -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta$$

Saat benang baru putus, sistem belum bergerak sehingga $\dot{\theta} = 0$ akan tetapi $\ddot{\theta} \neq 0$ (saat sistem diam belum tentu percepatannya juga nol, silahkan dipikirkan lebih lanjut). $\ddot{x}$ adalah percepatan linear titik atas tongkat, baik tongkat kiri maupun kanan, misalkan percepatan angular tongkat adalah α, maka $\ddot{x} = \alpha L$. Misalkan percepatan turun bola adalah a_y. Dari definisi sistem koordinat pada gambar di atas, kita buat $\ddot{y}$ memiliki arah positif ke atas, karena sebenarnya arah percepatan bola adalah ke bawah maka $\ddot{y} = -a_y$. Sehingga akan kita peroleh

$$\left.\begin{aligned}\alpha L = \ddot{x} = R\ddot{\theta}\cos\theta \\ a_y = -\ddot{y} = R\ddot{\theta}\sin\theta\end{aligned}\right\} \Longrightarrow\ a_y = \alpha L\tan\theta$$

Bola : Hukum II untuk gerak translasi

$$\sum F_y = ma_y$$

$$mg - N'\cos\theta = m\alpha L\tan\theta \Longrightarrow N' = \frac{mg - m\alpha L\tan\theta}{\cos\theta}$$

Tongkat : Hukum II untuk gerak rotasi (terhadap poros)

$$\sum \tau_p = I_p\alpha$$

$$N'\sin\theta\, L = I_p\alpha$$

Subtitusi N'

$$\frac{mg - m\alpha L\tan\theta}{\cos\theta}\sin\theta\, L = I_p\alpha$$

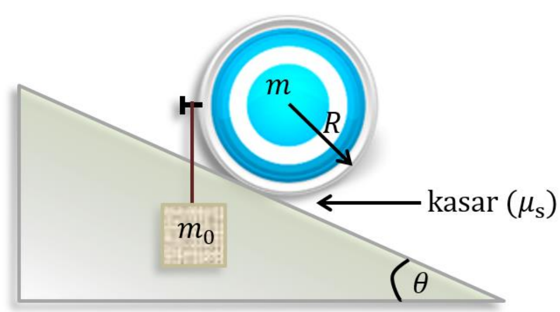
$$mgL\tan\theta - m\alpha L^2\tan^2\theta = I_p\alpha$$

$$\alpha\left(I_p + mL^2\tan^2\theta\right) = mgL\tan\theta \Longrightarrow \alpha = \frac{mgL\tan\theta}{I_p + mL^2\tan^2\theta}$$

Subtitusi nilai $\tan\theta$

$$\alpha = \frac{mgL\left(\frac{d}{\sqrt{4R^2 - d^2}}\right)}{I_p + mL^2\left(\frac{d^2}{4R^2 - d^2}\right)} \Longrightarrow \alpha = \frac{mgld\sqrt{4R^2 - d^2}}{I_p(4R^2 - d^2) + mL^2d^2}$$

4. Sebuah silinder dengan massa m dan jari-jari R berada di atas bidang miring dengan sudut kemiringan θ. Terdapat gaya gesek antara cakram dan bidang miring. Di sisi silinder terdapat paku yang terhubung dengan kotak bermassa m_0.



   a. Tentukan sistem koordinat anda dan gambarkan diagram gaya pada silinder dan kotak!

b. Tentukan besar m_0 sehingga silinder tidak berotasi dan tentukan gaya gesek yang bekerja pada silinder!

c. Tentukan besar gaya normal yang diberikan bidang miring pada silinder!

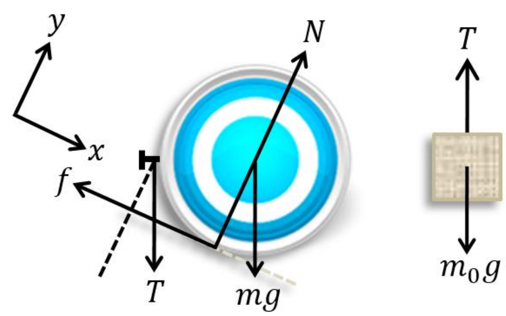
d. Tentukan nilai minimum koefisien gesek statis antara permukaan silinder dan bidang miring!

Jangan lupa menyederhanakan jawaban anda.

(Klinik Olimpiade Fisika @klinikfiskapku)

Pembahasan :

a. Kita gunakan sistem koordinat kartesius seperti pada gambar. Berikut diagram gaya yang bekerja pada silinder dan kotak.



b. Kita tinjau keseimbangan sistem dengan Hukum I Newton

Untuk m_0 : Hukum I Newton untuk gerak translasi arah vertikal

$$\sum F_{\mathrm{V}} = 0$$

$$T - m_0 g = 0 \Longrightarrow T = m_0 g \ldots (1)$$

Untuk m : Hukum I Newton untuk gerak translasi (sumbu x, sumbu y) dan untuk gerak rotasi (terhadap pusat massa silinder)

$$\sum F_{\mathrm{x}} = 0$$

$$-f + mg \sin\theta + T \sin\theta = 0 \Longrightarrow f = mg \sin\theta + T \sin\theta \ldots (2)$$

$$\sum F_{\mathrm{y}} = 0$$

$$N - mg \cos\theta - T \cos\theta = 0 \Longrightarrow N = mg \cos\theta + T \cos\theta \ldots (3)$$

$$\sum \tau_{\mathrm{pm}} = 0$$

$$TR - fR \Longrightarrow T = f \ldots (4)$$

Dari persamaan (1), (2) dan (4) akan kita peroleh

$$T = mg\sin\theta + T\sin\theta$$

$$m_0 g = mg\sin\theta + m_0 g\sin\theta$$

$$m_0(1-\sin\theta) = m\sin\theta \Longrightarrow m_0 = \frac{m\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

c. Subtitusi m_0 ke (1)

$$T = \frac{mg\sin\theta}{1-\sin\theta} \ldots (5)$$

Subtitusi (5) ke (3)

$$N = mg\cos\theta + \frac{mg\sin\theta}{1-\sin\theta}\cos\theta$$

$$N = \frac{mg\cos\theta\,(1-\sin\theta) + mg\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$N = \frac{mg\cos\theta - mg\sin\theta\cos\theta + mg\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta} \Longrightarrow N = \frac{mg\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

d. Dari persamaan (4) kita tahu bahwa

$$f = \frac{mg\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

Maka

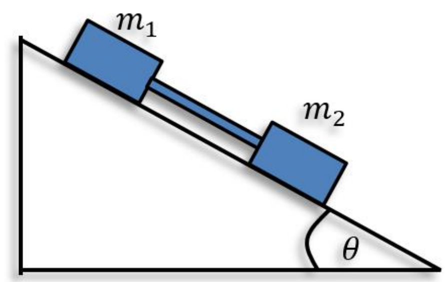
$$f \leq \mu_s N$$

$$\frac{mg\sin\theta}{1-\sin\theta} \leq \mu_s \frac{mg\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\mu_s \geq \tan\theta$$

$$\mu_{s,\min} = \tan\theta$$

5. Dua balok terhubung dengan sebuah batang tegar tak bermassa dan ditempatkan pada bidang miring dengan sudut kemiringan θ seperti ditunjukkan dalam gambar di bawah. Balok bermassa m_1 dan m_2 masing-masing memiliki koefisien gesek kinetik (terhadap bidang) μ_{k1} dan μ_{k2}.



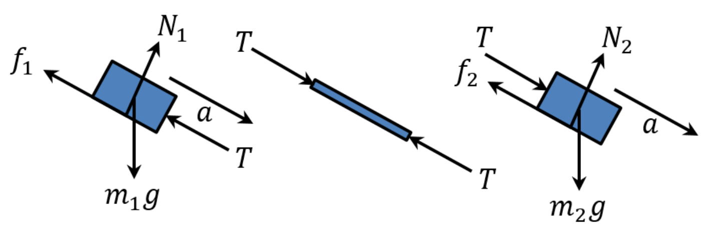
a. Carilah persamaan percepatan sistem tersebut!

b. Carilah persamaan gaya pada batang penghubung yang bekerja pada tiap balok!

c. Tunjukkan bahwa gaya pada bagian soal b adalah nol ketika $\mu_{k1} = \mu_{k2}$! **(OSK Fisika 2016)**

Solusi :

a. Perhatikan diagram gaya untuk masing-masing benda, yaitu balok m_1, m_2, dan tongkat penghubung berikut!



Untuk balok m_1

Arah tegak lurus bidang miring

$$N_1 - m_1 g \cos \theta = 0 \Longrightarrow N_1 = m_1 g \cos \theta$$

Arah sejajar bidang miring

$$m_1 g \sin \theta - T - f_1 = m_1 a \dots (1)$$

Untuk balok m_2

Arah tegak lurus bidang miring

$$N_2 - m_2 g \cos \theta = 0 \Longrightarrow N_2 = m_2 g \cos \theta$$

Arah sejajar bidang miring

$$m_2 g \sin \theta + T - f_2 = m_2 a \dots (2)$$

Karena gaya gesek yang bekerja adalah gaya gesek kinetik akan berlaku

$$f_1 = \mu_{k1} N_1 = \mu_{k1} m_1 g \cos \theta$$

$$f_2 = \mu_{k2} N_2 = \mu_{k2} m_2 g \cos \theta$$

Subtitusi f_1 dan f_2 ke persamaan (1) dan (2) kemudian jumlahkan hasilnya

$$\begin{array}{c} m_1 g \sin\theta - T - \mu_{k1} m_1 g \cos\theta = m_1 a \\ m_2 g \sin\theta + T - \mu_{k2} m_2 g \cos\theta = m_2 a \\ \hline (m_1 + m_2) g \sin\theta - (\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2) g \cos\theta = (m_1 + m_2) a \end{array} +$$

$$a = \frac{(m_1 + m_2)\sin\theta - (\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2)\cos\theta}{(m_1 + m_2)} g$$

$$a = \left[\sin\theta - \frac{(\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2)\cos\theta}{(m_1 + m_2)}\right] g$$

b. Subtitusi f_1 dan a ke persamaan (1)

$$m_1 g \sin\theta - T - \mu_{k1} m_1 g \cos\theta = m_1 \left[\sin\theta - \frac{(\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2)\cos\theta}{(m_1 + m_2)}\right] g$$

$$T = m_1 g \sin\theta - \mu_{k1} m_1 g \cos\theta - m_1 g \sin\theta + \frac{(\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2) m_1 g \cos\theta}{(m_1 + m_2)}$$

$$T = -\mu_{k1} m_1 g \cos\theta + \frac{(\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2) m_1 g \cos\theta}{(m_1 + m_2)}$$

$$T = \frac{-\mu_{k1}(m_1 + m_2) m_1 g \cos\theta + (\mu_{k1} m_1 + \mu_{k2} m_2) m_1 g \cos\theta}{(m_1 + m_2)}$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (\mu_{k2} - \mu_{k1}) g \cos\theta$$

c. Ketika $\mu_{k2} = \mu_{k1}$ maka

$$T = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \left(\underbrace{\mu_{k2} - \mu_{k1}}_{0}\right) g \cos\theta$$

$$T = 0$$

Maka hasil ini membuktikan bahwa ketika $\mu_{k2} = \mu_{k1}$, gaya dari batang penghubung ke masing-masing balok bernilai nol.

Catatan : kalau ada yang bingung aja sih, koq bisa gaya dari batang untuk masing-masing balok bernilai sama yaitu T. Oke deh, misalkan besar gayanya berbeda. Pada balok m_1 besarnya T_1 dan pada balok m_2 besarnya T_2. Coba kita tinjau gerakan batang sejajar permukaan bidang miring.

$$T_1 - T_2 = m_{\text{batang}} a$$

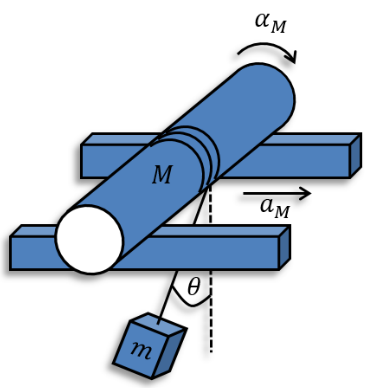
Namun karena batang tegar tak bermassa maka $m_{\text{batang}} = 0$. So

$$T_1 - T_2 = 0. a = 0$$

$$T_1 = T_2 = T$$

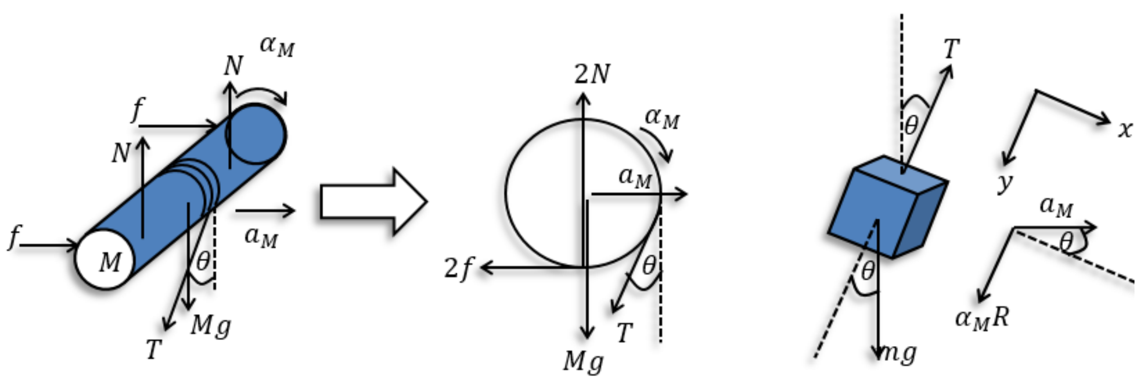
Yap begitulah...hehe... semangat ya belajarnya...!!!... ☺☺☺☺

6. Sebuah silinder bermassa $M = 0{,}6m$ berjari-jari R menggelinding tanpa slip di atas dua papan kayu kasar horizontal. Di badan silinder dililitkan seutas tali dan ujung tali tersebut digantungi balok bermassa m. Ketika silinder menggelinding di permukaan papan, tali akan membentuk sudut θ(mengapa tidak vertical?). Berapakah nilai $\sin\theta$? Berapakah percepatan silinder? **(Binovatif)**



Solusi :

Perhatikan gaya gaya yang bekerja pada silinder dan balok.



Dengan menggunakan hukum dua newton pada silinder dan balok akan kita dapatkan

Silinder (gerak translasi)

$$2f - T\,sin\,\theta = Ma_M \dots (1)$$

Silinder (gerak rotasi)

$$(T - 2f)R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_M$$

Karena silinder tidak slip akan berlaku $\alpha_M = \dfrac{a_M}{R}$

$$T - 2f = \frac{1}{2}Ma_M$$

$$2f = T - \frac{1}{2}Ma_M \ldots (2)$$

Balok (arah sumbu x)

$$mg \sin\theta = ma_M \cos\theta$$

$$a_M = g \tan\theta \ldots (3)$$

Balok (arah sumbu y)

$$mg \cos\theta - T = m(\underbrace{\alpha_M R}_{a_M} - a_M \sin\theta)$$

$$mg \cos\theta - T = ma_M(1 - \sin\theta)$$

Subtitusi persamaan (3)

$$T = mg[\cos\theta - \tan\theta\,(1 - \sin\theta)] \ldots (4)$$

Subtitusi persamaan (2) ke (1)

$$T - \frac{1}{2}Ma_M - T\sin\theta = Ma_M$$

$$T(1 - \sin\theta) = \frac{3}{2}Ma_M$$

Kemudian subtitusi persamaaan (3) dan (4)

$$mg[\cos\theta - \tan\theta\,(1 - \sin\theta)](1 - sin\,\theta) = \frac{3}{2}Mg\tan\theta \bigg| \times \frac{\cos\theta}{g}$$

$$2m[\cos^2\theta - \sin\theta\,(1 - \sin\theta)](1 - sin\,\theta) = 3M\sin\theta$$

$$2m\left[\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} - \sin\theta\right](1 - sin\,\theta) = 3M\sin\theta$$

$$2m(1 - \sin\theta)(1 - \sin\theta) = 3M\sin\theta$$

$$2m(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta) = 3M\sin\theta$$

$$2m - 4m\sin\theta + 2m\sin^2\theta = 3M\sin\theta$$

$$\underbrace{2m}_{a}\sin^2\theta \underbrace{-(3M + 4m)}_{b}\sin\theta + \underbrace{2m}_{c} = 0$$

Gunakan rumus abc untuk menyelesaikan persamaan kuadrat di atas

$$\sin\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sin\theta = \frac{-\left(-(3M+4m)\right) \pm \sqrt{\left(-(3M+4m)\right)^2 - 4(2m)(2m)}}{2(2m)}$$

$$\sin\theta = \frac{3M+4m \pm \sqrt{(3M+4m)^2 - (4m)^2}}{4m}$$

$$\sin\theta = 1 + \frac{3M}{4m} \pm \sqrt{\frac{9M^2 + 24Mm}{16m^2}}$$

$$\sin\theta = 1 + \frac{3M}{4m} \pm \sqrt{\frac{9M^2}{16m^2} + \frac{3M}{2m}}$$

Kita subtitusi $M = 0{,}6m = \frac{3}{5}m$

$$\sin\theta = 1 + \frac{3\left(\frac{3}{5}m\right)}{4m} \pm \sqrt{\frac{9\left(\frac{3}{5}m\right)^2}{16m^2} + \frac{3\left(\frac{3}{5}m\right)}{2m}}$$

$$\sin\theta = 1 + \frac{9}{20} \pm \sqrt{\frac{81}{400} + \frac{9}{10}}$$

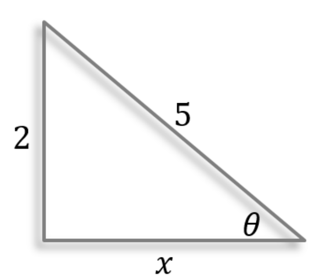
$$\sin\theta = 1 + \frac{9}{20} \pm \sqrt{\frac{81}{400} + \frac{360}{400}}$$

$$\sin\theta = \frac{29}{20} \pm \frac{21}{20}$$

Karena nilai $\sin\theta$ hanya berada di antara selang nilai $0 \leq \sin\theta \leq 1$, kita pilih yang tanda negative.

$$\sin\theta = \frac{2}{5}$$

Untuk mencari $\tan\theta$ kita gunakan cara ajaib ini



$$x = \sqrt{5^2 - 2^2}$$

$$x = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

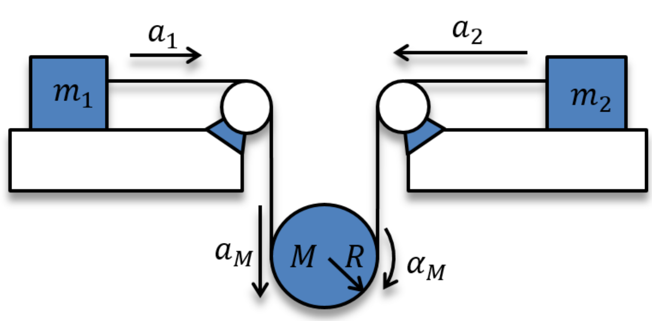
$$\cos\theta = \frac{x}{20} = \frac{\sqrt{21}}{20}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

Subtitusi nilai $\tan\theta$ ke persamaan (3) untuk mendapatkan percepatan silinder.

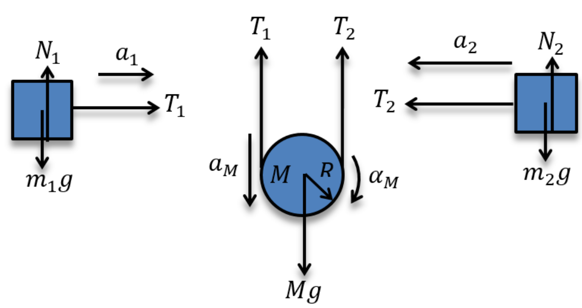
$$a_M = \frac{2}{\sqrt{21}} g$$

7. Sebuah katrol bermassa M dan berjari-jari R dihubungkan melalui seutas tali ke dua buah balok bermassa m_1 dan m_2 yang terletak di atas lantai licin horisontal. Berapakah percepatan sudut katrol? Anggap $a_2 > a_1$. **(Binovatif)**



Solusi :

Perhatikan diagram gaya masing-masing benda.



Dengan menggunakan Hukum II Newton pada setiap benda akan kita dapatkan

Balok kiri (gerak translasi arah sumbu x)

$$T_1 = m_1 a_1 \ldots (1)$$

Balok kanan (gerak translasi arah sumbu x)

$$T_2 = m_2 a_2 \ldots (2)$$

Katrol (gerak translasi arah sumbu y)

$$Mg - T_1 - T_2 = Ma_M \ldots (3)$$

Katrol (gerak rotasi)

$$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_M$$

$$2T_1 - 2T_2 = MR\alpha_M \ldots (4)$$

Kita juga bisa mendapatkan hubungan berikut

$$\alpha_M = \frac{a_2 - a_1}{2R} \ldots (5) \text{ dan } a_M = \frac{a_2 + a_1}{2} \ldots (6)$$

Nah loh, dapat dari mana coba. Ayo kita turunkan bersama.

Misalkan balok kiri bergerak sejauh x_1 ke kanan dan balok kanan bergerak ke kiri sejauh x_2 dimana $x_2 > x_1$, maka panjang tali yang yang menghubungkan katrol kiri dan katrol kanan dengan katrol M adalah $x_1 + x_2 + L_0$ dengan L_0 adalah panjang awal tali yang yang menghubungkan katrol kiri dan katrol kanan dengan katrol M sebelum balok kiri dan balok kanan bergerak dan nilainya kosntan. Katrol M akan turun sejauh $y_M = (x_1 + x_2 + L_0)/2$. Ingat bahwa percepatan adalah turunan kedua terhadap waktu dari perpindahan.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

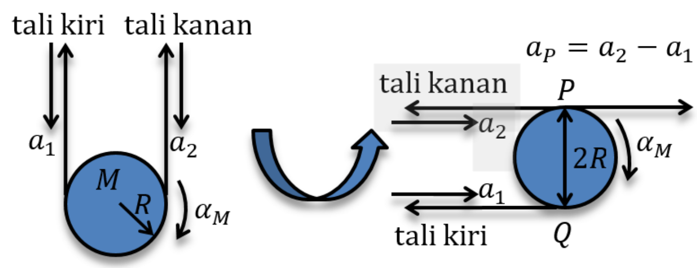
Sekarang kita turunkan hasil yang telah di dapat sebelumnya.

$$\frac{d^2y_M}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x_1 + x_2 + L_0}{2}\right)$$

$$\underbrace{\frac{d^2y_M}{dt^2}}_{a_M} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{d^2x_1}{dt^2}}_{a_1} + \underbrace{\frac{d^2x_2}{dt^2}}_{a_2} + \underbrace{\frac{d^2L_0}{dt^2}}_{0}\right)$$

$$a_M = \frac{a_2 + a_1}{2}, \text{ini adalah persamaan (6)}$$

Terus yang persamaan (5) dari mana asalnya? Nah perhatikan gambar di bawah ini dulu!



Jika kita tinjau relatif terhadap tali kiri, atau tali kiri diam, titik P yang berada di titik pertama persentuhan tali kanan dengan katrol memiliki percepatan $a_P = a_2 - a_1$. Karena titik Q berada di titik persentuhan pertama tali kiri dan katrol, dia juga diam dalam kerangka tali kiri. Titik P dapat kita anggap bergerak melingakr terhadap titik Q, titik Q disini dapat dianggap sebagai poros sesaat. Maka akan berlaku

$$2R\alpha_M = a_P = a_2 - a_1 \Longrightarrow \alpha_M = \frac{a_2 - a_1}{2R}, \text{ini adalah persamaan (5)}$$

Nah bagaimana guys, Masih ada yang belum paham..... klo masih ada.... ya sudahlah... tabahkan hatimu nak...wkwkwk.... nanti juga paham koq.... kita kembali ke soal.

Subtitusi persamaan (1), (2), dan (6) ke (3)

$$Mg - m_1a_1 - m_2a_2 = \frac{1}{2}M(a_2 + a_1)$$

$$(M + 2m_1)a_1 + (M + 2m_2)a_2 = 2Mg \dots (7)$$

Subtitusi persamaan (1), (2), dan (5) ke (4)

$$2m_1a_1 - 2m_2a_2 = MR\left(\frac{a_2 - a_1}{2R}\right)$$

$$a_1 = \frac{(M + 4m_2)}{(M + 4m_1)}a_2 \dots (8)$$

Subtitusi persmaan (8) ke (7)

$$(M + 2m_1)\frac{(M + 4m_2)}{(M + 4m_1)}a_2 + (M + 2m_2)a_2 = 2Mg$$

$$\frac{(M + 2m_1)(M + 4m_2) + (M + 2m_2)(M + 4m_1)}{(M + 4m_1)}a_2 = 2Mg$$

$$\frac{M^2 + 2M(m_1 + 2m_2) + 8m_1m_2 + M^2 + 2M(2m_1 + m_2) + 8m_1m_2}{(M + 4m_1)}a_2 = 2Mg$$

$$\frac{2M^2 + 2M(m_1 + 2m_2 + 2m_1 + m_2) + 16m_1m_2}{(M + 4m_1)}a_2 = 2Mg$$

$$\frac{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2}{(M + 4m_1)} a_2 = Mg$$

$$a_2 = \frac{M(M + 4m_1)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2} g \ldots (9)$$

Subtitusi persamaan (9) ke (8)

$$a_1 = \frac{(M + 4m_2)}{(M + 4m_1)} \frac{M(M + 4m_1)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2} g$$

$$a_1 = \frac{M(M + 4m_2)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2} g$$

Terakhir subtitusi a_2 dan a_1 ke persamaan (5)

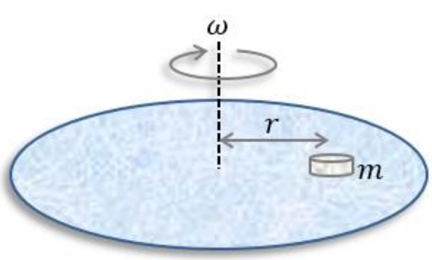
$$\alpha_M = \frac{1}{2R}\left(\frac{M(M + 4m_1)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2} g - \frac{M(M + 4m_2)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2} g\right)$$

$$\alpha_M = \frac{M(M + 4m_1) - M(M + 4m_2)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2} \frac{g}{2R}$$

$$\alpha_M = \frac{M^2 + 4Mm_1 - M^2 - 4Mm_2}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2} \frac{g}{2R}$$

$$\alpha_M = \frac{2M(m_1 - m_2)g}{(M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2)R}$$

8. Sebuah koin kecil bermassa m terletak di atas meja lingkaran yang berputar pada jarak r dari pusatnya seperti yang terlihat pada gambar. Jika meja mulai berputar dari keadaan diam lalu di percepat dengan percepatan sudut α. Berapakah koefisien gesek statik antara koin dan meja sehingga koin tepat tergelincir saat piringan telah berputar sebanyak N putaran.



Solusi :

Kita tinjau saat koin m tepat akan tergelincir. Misalkan saat ini kecepatan sudut meja dan koin m adalah ω. Gaya yang bekerja pada koin adalah gaya sentrifugal dan gaya yang menyebabkan meja dan koin berputar dengan percepatan sudut α dan kedua gaya ini tegak lurus. Besar total gaya luar yang bekerja pada massa m selain gaya gesek adalah

$$F = \sqrt{(m\alpha r)^2 + (m\omega^2 r)^2}$$

Saat koin hampir tergelincir, besar gaya ini sama dengan gaya gesek statik maksimum.

$$F = \mu_s mg = \sqrt{(m\alpha r)^2 + (m\omega^2 r)^2}$$

$$\mu_s = \frac{r}{g}\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Sudut yang ditempuh koin setelah N putaran adalah

$$\theta = 2\pi N$$

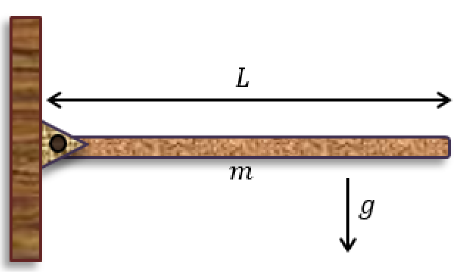
Dengan menggunakan persamaan gerak melingkar berubah beraturan dipercepat, kecepatan sudut ω saat koin akan tergelincir adalah

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\theta$$

$$\omega^2 = 4\alpha\pi N \Longrightarrow \omega^4 = 16\alpha^2\pi^2 N^2$$

$$\mu_s = \frac{r}{g}\sqrt{\alpha^2 + 16\alpha^2\pi^2 N^2} \Longrightarrow \mu_s = \frac{\alpha r}{g}\sqrt{1 + 16\pi^2 N^2}$$

9. Terdapat sebuah tongkat homogen bermassa m dan panjang L dengan momen inersia terhadap pusat massanya adalah $I_{\text{pm}} = (1/12)mL^2$. Tongkat ini diporos salah satu ujungnya pada dinding vertikal. Pada saat awal tongkat berada dalam posisi vertikal kemudian dilepaskan.



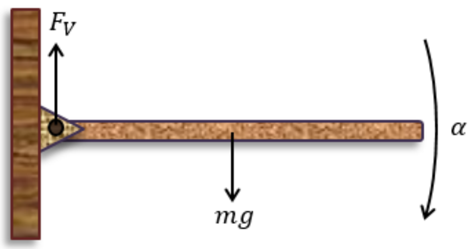
a. Tentukan percepatan angular tongkat sesaat setelah dilepaskan!
b. Tentukan percepatan linear suatu titik pada tongkat yang berjarak d dari poros sesaat setelah tongkat dilepaskan!

c. Tentukan nilai d_0 dimana titik-titik pada tongkat yang jaraknya lebih dari nilai ini akan memiliki percepatan yang lebih dari percepatan gravitasi!

(Klinik Olimpiade Fisika @klinikfiskapku)

Solusi :

a. Hukum II Newton untuk gerak rotasi (terhadap poros)



$$\sum \tau_p = I_p \alpha$$

Kenapa kita jadikan poros sebagai acuan? Sebenarnya kita juga bisa menjadikan pusat massa batang sebagai acuan, namun itu berarti menjadikan gaya dari poros F_V memiliki lengan gaya sehingga dia akan masuk ke persamaan torsi kita, padahal kita tidak mengetahui berapa besarnya. Akan tetapi, ketika kita menjadikan poros sebagai acuan, gaya dari poros F_V tidak akan memberikan torsi pada sistem kita karena lengan momennya sama dengan nol. Satu hal lagi, percepatan sudut tongkat baik dengan acuan poros ataupun acuan pusat massanya sendiri besarnya sama, silahkan dibuktikan sendiri ya ☺☺☺.

Berikutnya, momen inersia tongkat terhadap poros berbeda nilainya dengan momen inersia tongkat terhadap pusat massanya. Maka kita perlu mencari momen inersia tongkat terhadap poros. Ini bisa kita dapatkan dengan menggunakan teorema sumbu sejajar, bagi yang belum tau silahkan lebih lanjut dipelajari sendiri ya ☺☺☺.

$$mg\frac{L}{2} = \left[I_{\mathrm{pm}} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\alpha$$

$$mg\frac{L}{2} = \left[\frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2\right]\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{3g}{2L}$$

b. Percepatan sesaat titik ini adalah

$$a(d) = \alpha d \Longrightarrow a(d) = \frac{3gd}{2L}$$

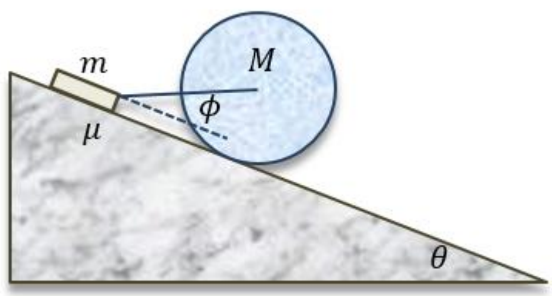
c. Untuk titik-titik yang memiliki percepatan lebih dari percepatan gravitasi

$$a(d) > g$$

$$\frac{3gd}{2L} > g \Rightarrow d > \frac{2L}{3} \Rightarrow d_0 = \frac{2L}{3}$$

Sehingga titik-titik yang berada di posisi $d_0 < d < L$ akan memiliki percepatan linear sesaat yang lebih besar dari percepatan gravitasi.

10. Sebuah silinder pejal bermassa M menggelinding tanpa slip menuruni bidang miring diam bersudut elevasi θ dengan kecepatan awal v_0. Seseorang ingin menghentikan silinder tersebut dengan memberikan beban. Pada pusat silinder tersebut dikaitkan tali sehingga tali membentuk sudut ϕ terhadap permukaan bidang miring. Di ujung lain tali tersebut, diikatkan ke sebuah beban kotak m yang memiliki massa sama dengan silinder. Diketahui koefisien gesek antara kotak dan bidang miring adalah μ serta percepatan gravitasi g.



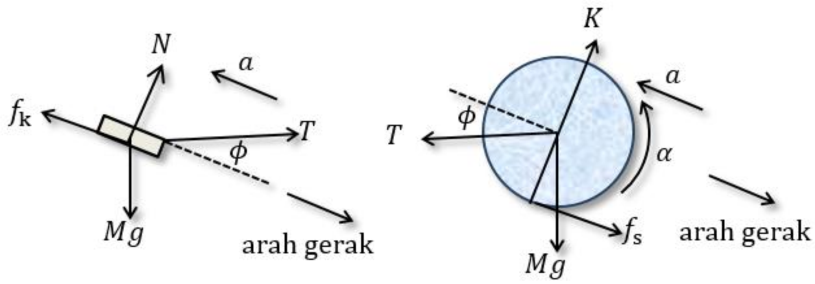
Asumsikan gesekan beban mampu mengehentikan gerak silinder. Tentukanlah :

a. Jarak yang ditempuh silinder hingga berhenti!

b. Syarat sudut ϕ yang dapat memenuhi asumsi di atas (nyatakan dalam θ dan μ)!

Solusi :

a. Di asumsikan bahwa gesekan antara beban dan bidang miring dapat menghentikan gerakan silinder, maka tali penghubung antara keduanya haruslah tegang, di sini dapat kita ambil bahwa perlambatan kedua benda sama yaitu a. Berikut diagram gaya pada kedua benda



Agar silinder bisa berhenti, sistem haruslah dipercepat ke atas berlawanan dengan arah gerak atau dengan kata lain sistem diperlambat dengan besar nilainya adalah a. Agar hal ini terpenuhi pula, tali yang menghubungkan kedua benda haruslah selalu tegang, karena jika tidak, silinder akan memiliki peluang untuk dipercepat. Baik, berikutnya kita tinjau gaya-gaya yang bekerja pada kedua benda.

Untuk Beban

Gaya gesek yang bekerja pada beban adalah gaya gesek kinetik karena terjadi gerak relatif antara permukaannya dengan permukaan bidang miring sehingga berlaku $f_k = \mu N$.

Resultan gaya arah tegak lurus bidang miring

$$N - Mg\cos\theta + T\sin\phi = 0$$

$$N = Mg\cos\theta - T\sin\phi \ldots (1)$$

Resultan gaya arah sejajar bidang miring

$$f_k - Mg\sin\theta - T\cos\phi = Ma$$

$$\mu N - Mg\sin\theta - T\cos\phi = Ma \ldots (2)$$

Untuk Silinder

Pada silinder ini, karena dia menggelinding tanpa slip dan tidak terjadi gerak relatif antara permukaannya dengan permukaan silinder, maka gaya gesek yang bekerja adalah gaya gesek statik dan berlaku $\alpha = a/R$.

Resultan gaya arah sejajar bidang miring

$$T\cos\phi - f_s - Mg\sin\theta = Ma \ldots (3)$$

Resultan torsi berlawanan arah jarum jam

$$f_s R = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right) \Longrightarrow f_s = \frac{1}{2}Ma \ldots (4)$$

Subtitusi persamaan (1) ke (2)

$$\mu(Mg\cos\theta - T\sin\phi) - Mg\sin\theta - T\cos\phi = Ma$$

$$Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) - T(\mu\sin\phi + \cos\phi) = Ma \ldots (5)$$

Subtitusi persamaan (4) ke (3)

$$T\cos\phi - \frac{1}{2}Ma - Mg\sin\theta = Ma$$

$$T\cos\phi = Mg\sin\theta + \frac{3}{2}Ma \Longrightarrow T = \frac{1}{\cos\phi}\left(Mg\sin\theta + \frac{3}{2}Ma\right) \ldots (6)$$

Subtitusi persamaan (6) ke (5)

$$Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) - \frac{1}{\cos\phi}\left(Mg\sin\theta + \frac{3}{2}Ma\right)(\mu\sin\phi + \cos\phi) = Ma$$

$$Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) - \left(Mg\sin\theta + \frac{3}{2}Ma\right)(\mu\tan\phi + 1) = Ma$$

$$2g[\mu\cos\theta - \sin\theta - (\mu\tan\phi + 1)\sin\theta] = a[3(\mu\tan\phi + 1) + 2]$$

$$a = \frac{2g[\mu\cos\theta - (\mu\tan\phi + 2)\sin\theta]}{3\mu\tan\phi + 5}$$

Kecepatan awal sistem adalah v_0, maka jarak yang ditempuh sampai berhenti adalah

$${v_t}^2 = {v_0}^2 - 2as$$

$$0 = {v_0}^2 - 2as \Longrightarrow s = \frac{{v_0}^2}{2a}$$

$$s = \frac{(3\mu\tan\phi + 5){v_0}^2}{4g[\mu\cos\theta - \sin\theta\,(\mu\tan\phi + 2)]}$$

b. Tadi kita definisikan arah a adalah berlawanan arah gerak sistem. Maka agar silinder dapat berhenti, perlambatan a haruslah lebih dari sama dengan nol, karena jika negatif, berarti arah a berlawanan dengan arah arah yang kita definisikan, yang artinya pula sistem dipercepatan searah dengan arah gerak awalnya.

$$a \geq 0$$

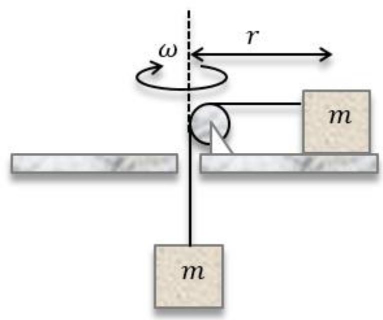
$$\frac{2g[\mu\cos\theta - (\mu\tan\phi + 2)\sin\theta]}{3\mu\tan\phi + 5} \geq 0$$

$$\mu\cos\theta - (\mu\tan\phi + 2)\sin\theta \geq 0$$

$$\mu\tan\phi + 2 \leq \mu\cot\theta$$

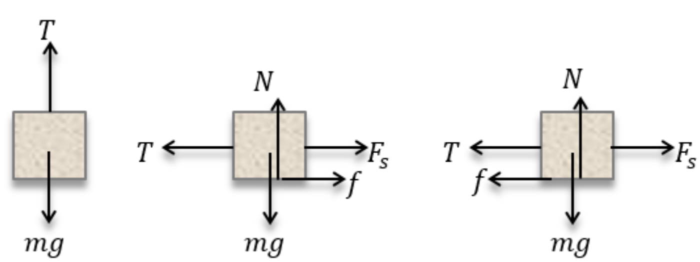
$$\tan\phi \leq \cot\theta - \frac{2}{\mu}$$

11. Gambar di bawah ini memperlihatkan dua balok kecil dengan massa sama (m) yang keduanya dihubungkan dengan seutas tali ringan yang tidak dapat molor. Salah satu balok berada di atas meja pada posisi radial sejauh r dari pusat sebuah meja datar yang diputar dengan kecepatan sudut konstan $\omega = 5\ \text{rad/s}$, sementara balok lainnya tergantung di bawah meja dengan tali penghubung kedua balok melewati sebuah katrol. Diketahui koefisien gesek statik antara balok dengan permukaan meja adalah $\mu_s = 0{,}6$, dan besar percepatan gravitasi $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Tentukan nilai maksimum dan minimum r, yaitu r_{maks} dan r_{min}, agar balok yang berada di atas meja tidak bergeser/bergerak. **(OSK Fisika 2017 Kota Medan)**



Solusi :

Ketika jari-jari r bernilai minimum, gaya gesek yang bekerja pada balok di atas meja cenderung berarah radial keluar menjauhi pusat rotasi meja. Sebaliknya ketika jari-jari r bernilai maksimum, gaya gesek yang bekerja pada balok di atas meja cenderung berarah radial ke dalam menuju pusat rotasi meja. Perhatikan diagram gaya yang bekerja pada balok di atas meja dan balok yang menggantung berikut



Tinjau balok yang menggantung

$$T - mg = 0 \Longrightarrow T = mg$$

Gaya sentrifugal yang bekerja pada balok di atas meja adalah

$$F_s = m\omega^2 r$$

Tinjau balok di atas meja pada arah horizontal

$$N - mg = 0 \Longrightarrow N = mg$$

Gaya gesek yang bekerja pada balok di atas meja untuk kondisi $r_{\min}$ dan $r_{\max}$ adalah gaya gesek kinetik maksimum namun berlawanan arah

$$f = \mu_s N = \mu_s mg$$

Untuk nilai $r = r_{\min}$, tinjau balok di atas maja untuk arah radial (gambar tengah)

$$F_s + f - T = 0$$

$$m\omega^2 r_{\min} + \mu_s mg - mg = 0$$

$$r_{\min} = \frac{(1 - \mu_s)g}{\omega^2}$$

Untuk nilai $r = r_{\max}$, tinjau balok di atas maja untuk arah radial (gambar kanan)

$$F_s - f - T = 0$$

$$m\omega^2 r_{\max} - \mu_s mg - mg = 0$$

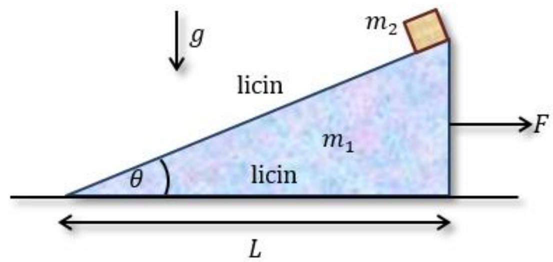
$$r_{\max} = \frac{(1 + \mu_s)g}{\omega^2}$$

Dengan mensubtitusi nilai-nilai yang diketahui akan kita dapatkan

$$r_{\min} = \frac{(1 - 0{,}6)9{,}8}{5^2} \Longrightarrow r_{\min} = 0{,}16 \text{ m}$$

$$r_{\max} = \frac{(1 + 0{,}6)9{,}8}{5^2} \Longrightarrow r_{\max} = 0{,}63 \text{ m}$$

12. Sebuah bidang miring bermassa m_1 dengan sudut kemiringan θ yang berada di atas lantai licin ditarik dengan gaya horizontal F yang konstan ke kanan. Panjang sisi horizontal bidang miring adalah L. Di atas sisi miring bidang miring tersebut terdapat balok m_2. Seluruh permukaan antara balok dengan bidang miring, serta antara bidang miring dengan lantai bersifat licin. Pada saat awal, bidang miring maupun balok dalam keadaan diam, serta balok berada di ujung atas bidang miring. Percepatan gravitasi g ke bawah. lihat gambar berikut.



Tentukan :

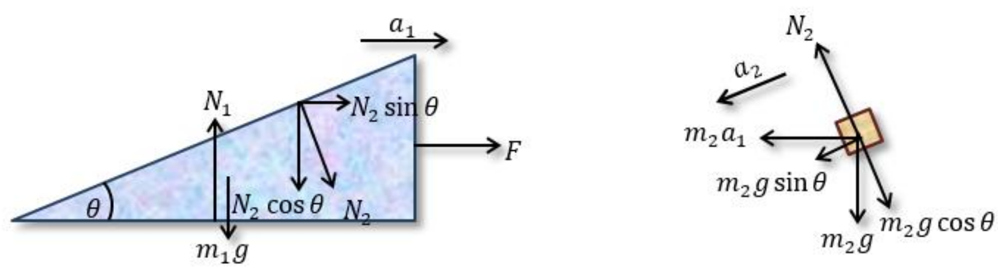
a. Persamaan gerak untuk bidang miring maupun balok.

b. Percepatan bidang miring terhadap lantai.

c. Waktu yang diperlukan balok agar sampai di dasar bidang miring.

Solusi :

a. Berikut diagram gaya pada bidang miring m_1 dan balok kecil m_2



Untuk m_1

Diagram gaya pada gambar di atas relatif terhadap lantai

Menggunakan Hukum II Newton pada arah horizontal akan kita peroleh

$$F + N_2 \sin\theta = m_1 a_1 \ldots (1)$$

Untuk m_2

Diagram gaya pada gambar di atas relatif terhadap bidang miring m_1. Karena bidang miring dipercepat ke kanan maka balok akan mendapatkan gaya fiktif yang arahnya ke kiri dan besarnya adalah massa balok di kali percepatan bidang miring.

Menggunakan Hukum II Newton pada arah tegak lurus dan sejajar bidang miring akan kita peroleh

$$N_2 + m_2 a_1 \sin\theta - m_2 g \cos\theta = 0$$

$$N_2 = m_2 g \cos\theta - m_2 a_1 \sin\theta \ldots (2)$$

Dan

$$m_2 g \sin\theta + m_2 a_1 \cos\theta = m_2 a_2$$

$$a_2 = g\sin\theta + a_1\cos\theta \ldots (3)$$

b. Subtitusi persamaan (2) ke (1)

$$F + (m_2 g\cos\theta - m_2 a_1 \sin\theta)\sin\theta = m_1 a_1$$

$$F + m_2 g \sin\ \theta\cos\theta = m_1 a_1 + m_2 a_1 \sin^2\theta$$

$$F + m_2 g \sin\ \theta\cos\theta = (m_1 + m_2\sin^2\theta)a_1$$

$$a_1 = \frac{F + m_2 g\sin\ \theta\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta}$$

c. Subtitusi a_1 ke persamaan (3)

$$a_2 = g\sin\theta + \frac{F + m_2 g\sin\ \theta\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta}\cos\theta$$

$$a_2 = \frac{(m_1 + m_2\sin^2\theta)g\sin\theta + (F + m_2 g\sin\ \theta\cos\theta)\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta}$$

$$a_2 = \frac{(m_1 + m_2)g\sin\theta + F\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta}$$

Waktu yang diperlukan balok untuk sampai di lantai adalah

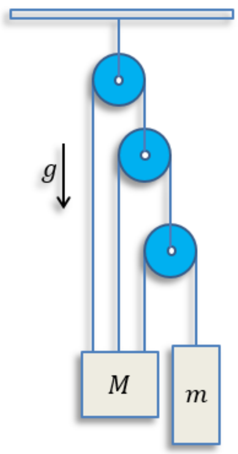
$$s = \frac{L}{\cos\theta} = \frac{1}{2}a_2 t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_2\cos\theta}}$$

Dengan mensubtitusi nilai a_2 akan kita peroleh

$$t = \sqrt{\frac{2L}{\cos\theta}\left(\frac{m_1 + m_2\sin^2\theta}{(m_1 + m_2)g\sin\theta + F\cos\theta}\right)}$$

13. Pada sistem berikut ini, semua katrol dan tali ringan dan licin. Pada sistem ini balok M hanya bertranslasi, tidak berotasi.



a. Buktikan bahwa percepatan katrol M dapat dinyatakan sebagai berikut

$$a_M = \frac{M - 7m}{M + 49m} g$$

b. Sekarang, jika terdapat N buah katrol, buktikan bahwa percepatan balok M akan berbentuk

$$a_M = \frac{M - (2^N - 1)m}{M + (2^N - 1)^2 m} g$$

(Binovatif)

Solusi :

a. Pertama, kita misalkan balok M dipercepat ke bawah dengan percepatan a_M sedangkan balok m dipercepat ke atas dengan percepatan a_m. Karena katrol licin, maka tegangan tali yang melewati katrol besarnya akan sama di kiri dan kanannya. sekarang perhatikan gambar sistem katrol di atas. Kita beri nama katrol paling atas katrol 1, katrol di bawahnya sebagai katrol 2, dan katrol berikutnya katrol 3. Selanjutnya kita sebut tegangan pada tali yang melewati katrol 1, 2, dan 3 sebagai $T_{1,}$ T_2, dan T_3. Sekarang kita tinjau gaya-gaya pada setiap benda.

Balok m

$$T_3 - mg = ma_m \ldots (1)$$

Balok M

$$Mg - T_1 - T_2 - T_3 = Ma_M \ldots (2)$$

Katrol 3

$$T_2 - 2T_3 = 0 \Longrightarrow T_2 = 2T_3 \ldots (3)$$

Katrol 2

$$T_1 - 2T_2 = 0 \Longrightarrow T_1 = 2T_2 = 4T_3 \dots (4)$$

Sekarang perhatikan hubungan percepatan balok M dan m. Percepatan tali 1 tepat sama dengan percepatan balok M, karena tali ini terhubung langsung dengan katrol 2 melalui katrol 1, maka katrol 2 akan dipercepat ke atas dengan percepatan a_M. Sekarang perhatikan tali 2. Percepatan tali 2 di sebelah kiri katrol 2 adalah sama dengan a_M. Kemudian jika kita tinjau percepatan tali 2 bagian kiri ini relatif terhadap katrol 2, maka percepatan akan menjadi $2a_M$ dan ini akan sama dengan percepatan tali kanan relatif terhadap katrol (klo belum paham silahkan pelajari konsep gerak relatif). Maka, percepatan tali 2 sebelah kanan terhadap tanah adalah $3a_M$ dan percepatan ini akan sama dengan percepatan katrol 3. Berikutnya amati dengan cara yang sama untuk tali 3, percepatan tali kirinya adalah a_M dan percepatan tali kanannya adalah $7a_M$ relatif terhadap tanah dan percepatan tali 3 sebelah kanan ini akan sama dengan percepatan balok m. Secara matematis hasil ini dapat kita nyatakan sebagai

$$a_m = 7a_M \dots (5)$$

Subtitusi persamaan (5) ke (1) akan diperoleh

$$T_3 - mg = m(7a_M) \Longrightarrow T_3 = mg + 7ma_M \dots (6)$$

Subtitusi persamaan (3) dan (4) ke (2)

$$Mg - 4T_3 - 2T_3 - T_3 = Ma_M$$

$$Mg - 7T_3 = ma_M$$

Kemudian subtitusi persamaan (6)

$$Mg - 7(mg + 7ma_M) = ma_M$$

$$Mg - 7mg - 49ma_M = Ma_M$$

$$(M - 7m)g = (M + 49m)a_M \Longrightarrow a_M = \frac{M - 7m}{M + 49m}g \text{ (terbukti)}$$

b. Sekarang terdapat N buah katrol, berdasarkan persamaan (3) dan (4), hubungan tegangan tali pada katrol ke 1, 2, 3, ... , $N - 1$, dan N adalah

$$T_{N-1} = 2T_N$$

$$T_{N-2} = 2T_{N-1} = 4T_N$$

$$T_{N-3} = 2T_{N-2} = 4T_{N-1} = 8T_N$$

$$\dots$$
$$T_3 = 2^{N-3} T_N$$
$$T_2 = 2^{N-2} T_N$$
$$T_1 = 2^{N-1} T_N$$

Atau secara umum $T_k = 2^{N-k} T_N$

Persamaan gerak balok m adalah

$$T_N - mg = ma_m \dots (7)$$

Persamaan gerak balok M menjadi

$$Mg - T_1 - T_2 - T_3 - \cdots - T_{N-3} - T_{N-2} - T_{N-1} - T_N = Ma_M$$
$$Mg - (T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{N-3} + T_{N-2} + T_{N-1} + T_N) = Ma_M$$
$$Mg - T = Ma_M \dots (8)$$

Dengan

$$T = T_N \sum_{k=1}^{N} 2^{N-k} = T_N (2^{N-1} + 2^{N-2} + 2^{N-3} + \cdots + 2^2 + 2 + 1)$$
$$T = T_N \underbrace{(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{N-3} + 2^{N-2} + 2^{N-1})}_{\text{deret geometri}} = T_N S_N$$

S_N adalah deret geometri dengan suku pertama $a = 1$ dan rasio $r = 2$, maka nilainya adalah

$$S_N = \frac{a(r^N - 1)}{r - 1} = \frac{2^N - 1}{2 - 1} = 2^N - 1$$

Maka

$$T = (2^N - 1) T_N \dots (9)$$

Sekarang kita lihat hubungan percepatan balok M, tiap katrol, dan balok m. Dengan cara yang sama seperti bagian a, akan kita dapatkan hubungan

$$a_1 = 0 \text{ (katrol 1 diam)}$$
$$a_2 = a_M$$
$$a_3 = a_M + a_2 + a_2 = 3a_M$$
$$a_4 = a_M + a_3 + a_3 = 7a_M$$
$$a_5 = a_M + a_4 + a_4 = 15a_M$$
$$a_6 = a_M + a_5 + a_5 = 31a_M$$
$$\dots$$

$$a_{N-1} = (2^{N-2} - 1)a_M$$
$$a_N = (2^{N-1} - 1)a_M$$
$$a_{N+1} = (2^N - 1)a_M$$

Secara umum menjadi $a_k = (2^{k-1} - 1)a_M$

Balok m dapat kita anggap sebagai katrol ke $N + 1$, sehingga hubungan percepatan balok M dan m menjadi

$$a_m = (2^N - 1)a_M \ldots (10)$$

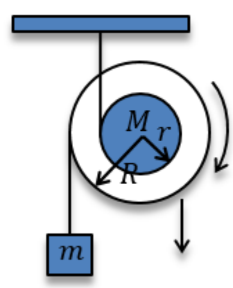
Subtitusi persamaan (10) ke (7)

$$T_N - mg = m(2^N - 1)a_M$$
$$T_N = mg + m(2^N - 1)a_M \ldots (11)$$

Dari gabungan persamaan (8), (9), dan (11) akan kita peroleh

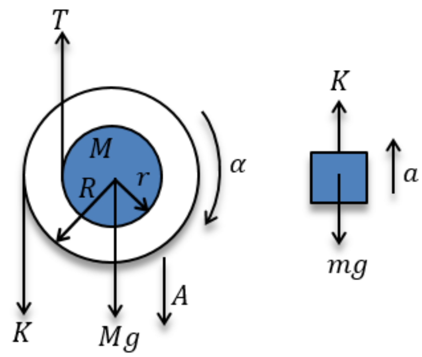
$$Mg - (2^N - 1)[mg + m(2^N - 1)a_M] = Ma_M$$
$$Mg - (2^N - 1)mg - m(2^N - 1)^2 a_M = Ma_M$$
$$(M - (2^N - 1)m)g = [M + m(2^N - 1)^2]a_M$$
$$a_M = \frac{M - (2^N - 1)m}{M + (2^N - 1)^2 m} g \text{ (terbukti)}$$

14. Sebuah yoyo bermassa M digantungkan ke langit-langit melalui seutas tali yang melilit jari jari dalamnya (r). Pada jari-jari luar yoyo (R) juga dililitkan tali, kemudian pada ujungnya digantungkan balok bermassa m. Berapa percepatan sudut yoyo? Anggap yoyo sebagai cakram bermassa M dan berjari-jari R. **(Binovatif)**



Solusi :

Perhatikan diagram gaya yang bekerja pada yoyo dan balok.



Dengan menggunakan Hukum II Newton pada kedua benda akan kita dapatkan

Yoyo (gerak translasi arah sumbu y)

$$Mg + K - T = MA \ldots (1)$$

Yoyo (gerak rotasi)

$$Tr - KR = I\alpha$$

Karena yoyo dianggap sebagai cakram bermassa M dan berjari-jari R, momen inersianya menjadi $I = \frac{1}{2}MR^2$.

$$Tr - KR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \ldots (2)$$

Balok (gerak translasi arah sumbu y)

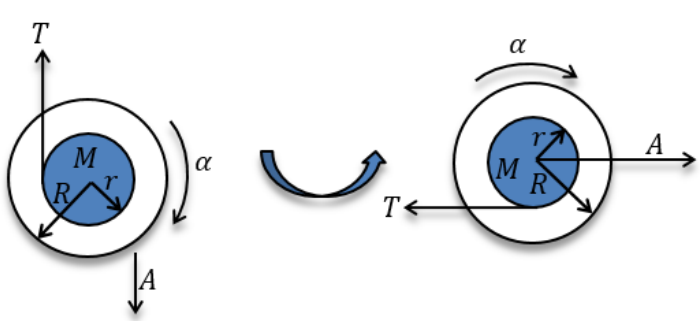
$$K - mg = ma \ldots (3)$$

Jika diamati dengan seksama, kita bisa dapatkan hubungan berikut ini

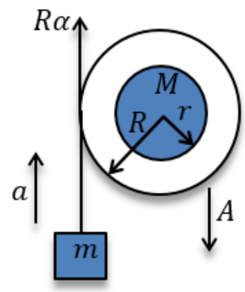
$$A = r\alpha \ldots (4)$$

$$a = (R - r)\alpha \ldots (5)$$

Loh, dari mana dapatnya, koq bisa gituh sih... hehe... gini trik dapetinnya. Lihat lagi gambar ini!



Coba lihat bagian yoyo yang warna hijau, dia kan ibaratkan silinder yang menggelinding tanpa slip di atas lantai, kalau di sini bagian dalam yoyo menggelinding tanpa slip di atas tali. Jadi berlakulah syarat gerak tanpa slip yaitu $A = r\alpha$.



Terus yang persamaan (5) dari mana? Begini, jika kita tinjau relatif terhadap yoyo, artinya yoyo dianggap diam, maka percepatan tali yang melilit jari-jari luarnya adalah αR. Nah tali yang melilit jari-jari luar ini kan terhubung langsung dengan balok m, berarti percepatan balok m relatif terhdap yoyo adalah αR dan arahnya ke atas. Namun pada kenyataannya yoyo dipercepat terhadap tanah yang arahnya ke bawah sebesar $A = r\alpha$, berarti percepatan balok terhadap tanah adalah percepatan ke atasnya terhadap yoyo atau αR dikurangi percepatan yoyo turun $r\alpha$, atau secara menjadi

$$a = R\alpha - r\alpha$$

$$a = (R - r)\alpha$$

Begitu ya... kembali ke soal.

Subtitusi persamaan (5) ke (3)

$$K - mg = m(R - r)\alpha \Longrightarrow K = mg + m(R - r)\alpha \ldots (6)$$

Subtitusi persamaan (4) dan (6) ke (1)

$$Mg + mg + m(R - r)\alpha - T = Mr\alpha$$

$$(M + m)g + mR\alpha - mr\alpha - Mr\alpha = T$$

$$T = (M + m)g + (m(R - r) - Mr)\alpha \ldots (7)$$

Subtitusi persamaan (6) dan (7) ke (2)

$$(M + m)gr + (m(R - r) - Mr)r\alpha - mgR - m(R - r)R\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$[(M + m)r - mR]g = \left[-(m(R - r) - Mr)r + m(R - r)R + \frac{1}{2}MR^2\right]\alpha$$

$$[(M + m)r - mR]g = \left[-mRr + mr^2 + Mr^2 + mR^2 - mRr + \frac{1}{2}MR^2\right]\alpha$$

$$[(M+m)r-mR]g=\left[\left[Mr^2+\frac{1}{2}MR^2+m\underbrace{(R^2-2Rr+r^2)}_{(R-r)^2}\right]\alpha\right|\times 2$$

$$2[(M+m)r-mR]g=[M(R^2+2r^2)+2m(R-r)^2]\alpha$$

$$\alpha=\frac{2[(M+m)r-mR]g}{M(R^2+2r^2)+2m(R-r)^2}$$

Yang selanjutnya ini mungkin tidak ditanyakan, tapi penting untuk diketahui.

Arah putaran yoyo akan searah jarum jam jika $\alpha > 0$

$$\frac{2(M+m)r-2mR}{M(R^2+2r^2)+2m(R-r)^2}g \ > 0$$

$$2(M+m)r-2mR>0$$

$$Mr+mr>mR$$

$$Mr>m(R-r)$$

$$\frac{M}{m}>\frac{R}{r}-1$$

Jadi perbandingan massa yoyo dan balok haruslah lebih besar dari perbandingan jari-jari luar dan dalam yoyo dikurangi 1. Jika nilainya sama sistem akan seimbang.

Nah bagaimana kalau $\frac{M}{m}<\frac{R}{r}-1$, percepatan sudut akan bernilai negatif.

Artinya arahnya akan berlawanan dengan arah awal yang sudah kita tentukan. Arah awal searah jarum jam, dan sekarang arahnya menjadi berlawanan arah jarum jam. Karena sebab apa? Asbab nya adalah nilai perbandingan massa tadi.

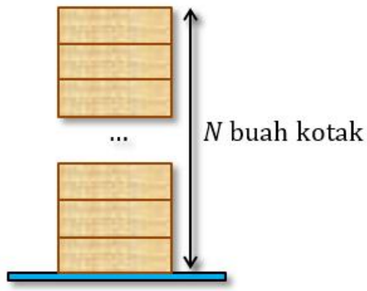
15. Sebanyak N buah kotak identik bermassa m ditumpuk seperti diilustrasikan pada gambar di bawah. Koefisien gesek di setiap permukaan adalah μ . Kotak ke k $(0<k<N)$ ditarik sehingga mengalami percepatan sebesar a.

a. Hitung besar gaya tarik pada kotak k

b. Hitung besar percepatan kotak p $(0<p<k)$

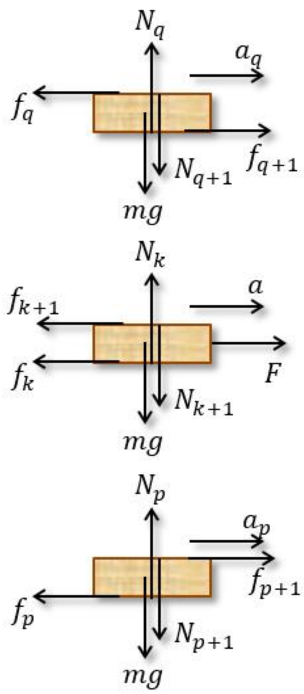
c. Hitung besar percepatan kotak q $(k<q<N)$

(LTJJ Fisika SMA 2018 Pelatihan-OSN.com)



Solusi:

Kita hitung kotak dari bawah. Perhatikan diagram gaya pada masing-masing kotak!



Kita asumsikan semua gaya gesek yang bekerja adalah gaya gesek kinetik. Gaya normal dan gaya gesek kinetik yang bekerja pada setiap benda adalah

$N_1 = Nmg$ $\qquad f_1 = \mu Nmg$

$N_2 = (N-1)mg$ $\qquad f_2 = \mu(N-1)mg$

$N_3 = (N-2)mg$ $\qquad f_3 = \mu(N-2)mg$

$N_n = (N-n-1)mg$ $\qquad f_n = \mu(N-n-1)mg$

$N_k = (N-k-1)mg$ $\qquad f_k = \mu(N-k-1)mg$

$N_{k+1} = (N-k-2)mg$ $\qquad f_{k+1} = \mu(N-k-2)mg$

$N_p = (N - p - 1)mg$ $\quad\quad$ $f_p = \mu(N - p - 1)mg$

$N_{p+1} = (N - p - 2)mg$ $\quad\quad$ $f_{p+1} = \mu(N - p - 2)mg$

$N_q = (N - q - 1)mg$ $\quad\quad$ $f_q = \mu(N - q - 1)mg$

$N_{q+1} = (N - q - 2)mg$ $\quad\quad$ $f_{q+1} = \mu(N - q - 2)mg$

a. Tinjau kotak ke k

$$\sum F_x = ma$$
$$F - f_k - f_{k+1} = ma$$
$$F - \mu(N - k - 1)mg - \mu(N - k - 2)mg = ma$$
$$F = \mu(2N - 2k - 3)mg + ma$$

b. Tinjau kotak ke p

$$\Sigma F_x = ma_p$$
$$-f_p + f_{p+1} = ma_p$$

Kita tahu bahwa $f_p > f_{p+1}$, sedangkan gaya yang cenderung menarik kotak ke p adalah f_{p+1}, berarti gaya f_p bukan gaya gesek kinetik melainkan gaya gesek statik dan belum mencapai nilai maksimumnya. Sedangkan f_{p+1} adalah gaya gesek statik yang sudah mencapai nilai maksimum dan besarnya sama dengan f_p. Hasil ini menandakan bahwa kotak ke p diam.

$$a_p = 0$$

Karena $0 < p < k$, berarti seluruh kotak di bawah kotak ke k seluruhnya tidak bergerak.

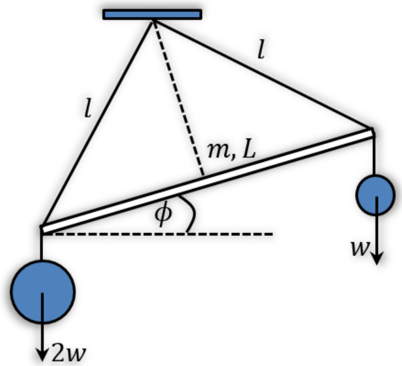
c. Tinjau kotak ke q

$$\sum F_x = ma_q$$
$$f_q - f_{q+1} = ma_q$$
$$\mu(N - q - 1)mg - \mu(N - q + 1)mg = ma_q$$
$$\mu mg = ma_q \Longrightarrow a_q = \mu g$$

Karena $k < q < N$, berarti seluruh kotak di atas kotak ke k seluruhnya bergerak bersama dengan percepatan yang sama μg.

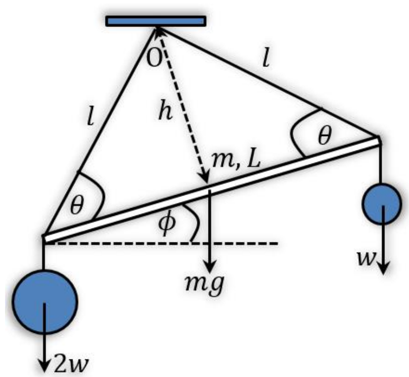
Dinamika dan Kesetimbangan: Aplikasi Hukum I Newton

1. Sebuah batang homogen dengan massa m dan panjang L diikat dengan menggunakan 2 tali yang masing-masing panjangnya l. Terdapat dua beban yang digantung pada ujung batang B dan C dengan berat masing-masing $2w$ dan w (lihat gambar). Tentukan besar sudut ϕ ketika sistem dalam keadaan setimbang. Nyatakan jawaban Anda dalam w, m, l, dan L. **(OSK Fisika 2016)**



Solusi :

Karena sistem seimbang, torsi total yang bekerja pada satiap titik akan bernilai nol. Di sini kita harus bisa memilih titik acuan yang paling efektif atau yang paling memudahkan kita. Ada yang tau titik mana itu? Kalau saya sendiri, saya akan memilih titik terikatnya tali di langit-langit. Kenapa? Karena menurut saya ini tidak akan terlalu banyak memuat variabel.



Tapi teman-teman boleh memilih titik mana saja namun untuk pembahasan ini, kita akan jadikan titik terikat tali di langit-langit sebagai acuan, untuk mudahnya kita sebut titik ini sebagai titik O.

Dari gambar bisa kita dapatkan

$$\cos\theta = \frac{L}{2l}, \sin\theta = \frac{\sqrt{4l^2 - L^2}}{2l}, \text{dan} \tan\theta = \frac{\sqrt{4l^2 - L^2}}{L}$$

$$h = l\sin\theta$$

keseimbangan torsi tehadap titik O

$$\sum \tau = 0$$

$$2wl\cos(\theta + \phi) - mgh\sin\phi - wl\cos(\theta - \phi) = 0$$

Gunakan identitas trigonometri

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

maka

$$2wl(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) - mgl\sin\theta\sin\phi - wl(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = 0$$

$$w\cos\theta\cos\phi = (3w + mg)\sin\theta\sin\phi$$

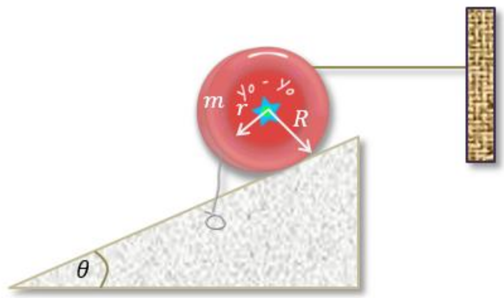
$$\tan\phi = \left.\frac{w\cos\theta}{(3w + mg)\sin\theta}\right| \times \frac{1/\cos\theta}{1/\cos\theta}$$

$$\tan\phi = \frac{w}{(3w + mg)\tan\theta}$$

$$\tan\phi = \frac{w}{(3w + mg)\frac{\sqrt{4l^2 - L^2}}{L}}$$

$$\tan\phi = \frac{wL}{(3w + mg)\sqrt{4l^2 - L^2}} \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{wL}{(3w + mg)\sqrt{4l^2 - L^2}}\right)$$

2. Sebuah yoyo homogen yang memiliki massa m dan jari-jari luar R berada di atas permukaan bidang miring kasar yang membentuk sudut θ terhadap horizontal. Yoyo dibuat diam dengan mengikatkan sebuah benang pada permukaan jari-jari dalamnya r seperti tampak pada gambar. Momen inersia yoyo terhadap pusat massanya adalah $I_{\text{pm}} = (1/2)mR^2$. Sistem berada dalam kesetimbangan.



a. Gambarkan diagram gaya yang bekerja pada yoyo!

b. Hitung gaya gesek yang bekerja padanya untuk kondisi ini (f)! Nyatakan dalam m, g, r, R, dan θ.

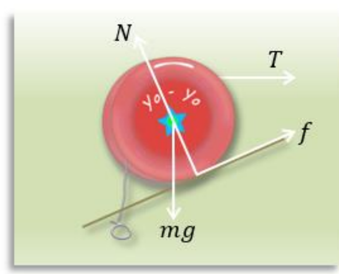
c. Benang kemudian dipotong sehingga yoyo menggelinding tanpa slip. Tentukan gaya gesek yang bekerja padanya untuk kondisi ini (f_{rot})!

d. Tentukan perbandingan f_{rot}/f untuk $r = R/2$ dan $\theta = \pi/3$ radian!

(Klinik Olimpiade Fisika @klinikfiskapku)

Solusi :

a. Berikut gaya-gaya yang bekerja pada yoyo.



b. Kita jadikan sumbu x sejajar bidang miring dan sumbu y tegak lurus bidang miring.

Hukum I Newton untuk gerak translasi (sumbu x)

$$\sum F_{\text{x}} = 0$$

$$f + T\cos\theta - mg\sin\theta = 0 \ldots (1)$$

Hukum I Newton untuk gerak rotasi (terhadap pusat massa yoyo)

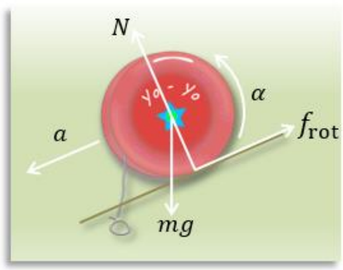
$$\sum \tau_{\text{pm}} = 0$$

$$Tf - fR = 0 \Longrightarrow T = \frac{R}{r} f \ldots (2)$$

Subtitusi (2) ke (1)

$$f + \frac{R}{r} f \cos\theta - mg \sin\theta = 0 \Longrightarrow f = \frac{mgr \sin\theta}{r + R\cos\theta}$$

c. Ketika benang diputus gaya tegang T akan hilang dan yoyo dipercepat ke bawah.



Karena yoyo menggelinding tanpa slip akan berlaku $a = \alpha R$.

Hukum II Newton untuk gerak rotasi (terhadap pusat massa yoyo)

$$\sum \tau_{\text{pm}} = I_{\text{pm}}\alpha$$

$$f_{\text{rot}} R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R} \Longrightarrow f_{\text{rot}} = \frac{1}{2} ma \ldots (3)$$

Hukum II Newton untuk gerak translasi (sumbu x)

$$\sum F_{\text{x}} = 0$$

$$mg \sin\theta - f_{\text{rot}} = ma$$

Subtitusi (3)

$$mg\sin\theta - \frac{1}{2} ma = ma \Longrightarrow a = \frac{2}{3} g \sin\theta \ldots (4)$$

Subtitusi (4) ke (3)

$$f_{\text{rot}} = \frac{1}{3} mg \sin\theta$$

d. Perbandingannya adalah

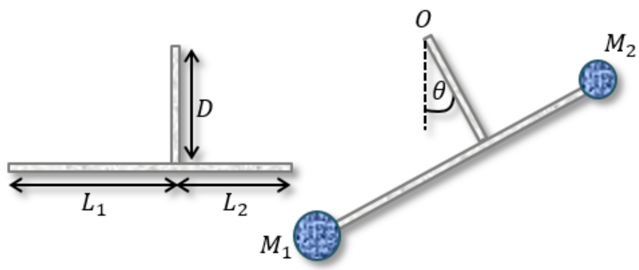
$$\frac{f_{\text{rot}}}{f} = \frac{r + R\cos\theta}{3r}$$

Untuk $r = R/2$ dan $\theta = \pi/3$ memberikan $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ dan $\cos\theta = 1/2$ sehingga

$$\frac{f_{\text{rot}}}{f} = \frac{(R/2) + R(1/2)}{3(R/2)} \Longrightarrow \frac{f_{\text{rot}}}{f} = \frac{2}{3}$$

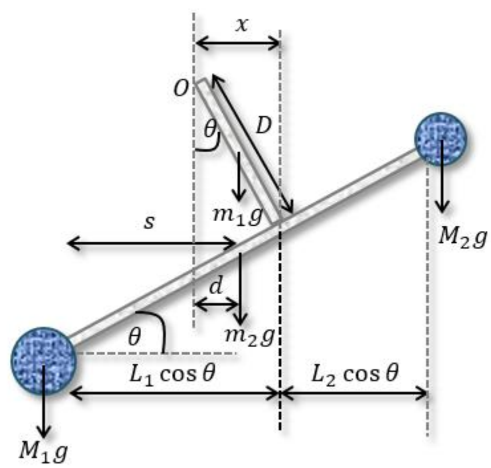
3. Diketahui dua batang seragam yang disusun seperti pada gambar berikut. Batang dengan panjang D dipasang tegak lurus terhadap batang dengan pamjang $L_1 + L_2$ (lihat gambar). Massa total batang adalah M. Ujung batang D diletakkan pada poros O yang

licin, sedangkan pada ujung batang L_1 dan batang L_2 dipasang massa masing-masing berturut-turut M_1 dan L_2. Ternyata pada keadaan setimbang,batang D membentuk sudut θ terhadap vertikal. Percepatan gravitasi g ke bawah. Tentukan nilai dari tan θ dinyatakan dalam besaran-besaran di atas! **(OSK Fisika 2017)**



Solusi :

Perhatikan diagram gaya batang padang saat keadaaan setimbang berikut!



Karena batang seragam, massa persatuan panjang batang adalah

$$\lambda = \frac{M}{D + L_1 + L_2}$$

Massa batang yang panjangnya D adalah

$$m_1 = \lambda D = \frac{MD}{D + L_1 + L_2}$$

Massa batang yang panjangnya $L_1 + L_2$ adalah

$$m_1 = \lambda(L_1 + L_2) = \frac{M(L_1 + L_2)}{D + L_1 + L_2}$$

Selanjutnya perhatikan gambar disamping ini!

Lengan momen masing-masing gaya berat adalah

Gaya $m_1 g \Longrightarrow \frac{x}{2}$

$$\frac{x}{2} = \frac{D \sin\theta}{2}$$

Gaya $m_2 g \Longrightarrow d$

$$d = x - (L_1 \cos\theta - s) = D\sin\theta - \left(L_1 \cos\theta - \frac{L_1 + L_2}{2}\cos\theta\right)$$

$$d = D\sin\theta - \frac{L_1 - L_2}{2}\cos\theta$$

Gaya $M_1 g \Longrightarrow L_1 \cos\theta - x$

Gaya $M_2 g \Longrightarrow L_2 \cos\theta + x$

Kemudian kita gunakan Hukum I Newton tentang gerak rotasi atau keseimbangan torsi terhadap titik O.

$$\sum \tau_O = 0$$

$$M_1 g(L_1 \cos\theta - x) - M_2 g(L_2 \cos\theta + x) - m_1 g\frac{x}{2} - m_2 g d = 0$$

$$M_1 g(L_1 \cos\theta - D\sin\theta) - M_2 g(L_2\cos\theta + D\sin\theta) - \frac{1}{2}m_1 g D\sin\theta$$
$$- m_2 g\left(D\sin\theta - \frac{L_1 - L_2}{2}\cos\theta\right) = 0 \bigg| \times \frac{2}{g}$$

$$2M_1 L_1\cos\theta - 2M_2 L_2\cos\theta - 2(M_1 + M_2)D\sin\theta - m_1 D\sin\theta - 2m_2 D\sin\theta$$
$$+ m_2(L_1 - L_2)\cos\theta = 0$$

$$[2(M_1 + M_2) + m_1 + 2m_2]D\sin\theta = \left(2(M_1 L_1 - M_2 L_2) + m_2(L_1 - L_2)\right)\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{2(M_1 L_1 - M_2 L_2) + m_2(L_1 - L_2)}{[2(M_1 + M_2) + m_1 + 2m_2]D}$$

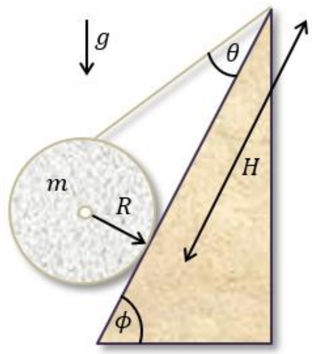
Subtitusi m_1 dan m_2 yang sudah kita dapatkan di awal

$$\tan\theta = \frac{2(M_1 L_1 - M_2 L_2) + \frac{M(L_1 + L_2)}{D + L_1 + L_2}(L_1 - L_2)}{\left[2(M_1 + M_2) + \frac{MD}{D + L_1 + L_2} + 2\frac{M(L_1 + L_2)}{D + L_1 + L_2}\right]D} \Bigg| \times \frac{D + L_1 + L_2}{D + L_1 + L_2}$$

$$\tan\theta = \frac{2(M_1 L_1 - M_2 L_2)(D + L_1 + L_2) + M(L_1 + L_2)(L_1 - L_2)}{2(M_1 + M_2)D(D + L_1 + L_2) + MD[D + 2(L_1 + L_2)]}$$

$$\tan\theta = \frac{2(M_1L_1 - M_2L_2)(D + L_1 + L_2) + M\left({L_1}^2 - {L_2}^2\right)}{2(M_1 + M_2)D(D + L_1 + L_2) + MD[D + 2(L_1 + L_2)]}$$

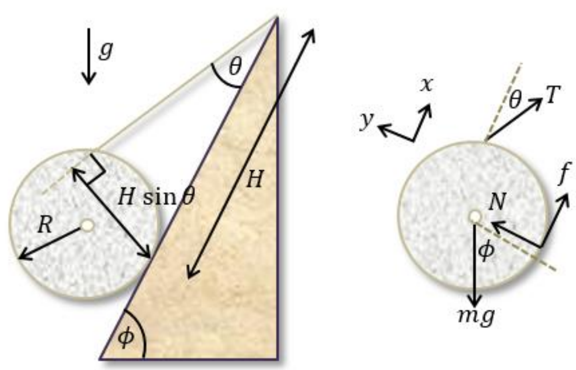
4. Sebuah bola bermassa m dan berjari-jari R di tahan pada tembok oleh sebuah tali. Tali di ikatkan di tembok pada jarak H dari titik kontak bola dengan tembok. Tali ini membentuk sudut θ terhadap tembok dan garis perpanjangan tali ini tidak melewati pusat bola. Tembok dimana bola ditahan membentuk sudut ϕ terhadap tanah. Sistem ini ditunjukan oleh gambar di bawah.



5. Tentukan besar gaya tegang pada tali yang menahan bola tersebut!
6. Berapa koefisien gesek minimum antara bola dan tembok agar bola dapat seimbang secara statik? **(TO OSK Sainsworld)**

Solusi :

a. Untuk menyelesaikan soal ini, kita gunakan syarat-syarat keseimbangan statik yaitu resultan torsi dan gaya pada setiap arah bernilai nol. Perhatikan diagram berikut!



Tinjau keseimbangan torsi pada bola terhadap titik kontak bola dengan tembok. Dari sini akan kita peroleh

$$\sum \tau = 0$$

$$TH \sin\theta - mgR \sin\phi = 0 \Longrightarrow T = \frac{mgR \sin\phi}{H \sin\theta}$$

Tinjau keseimbangan gaya pada bola. Pada sumbu x akan kita peroleh

$$T \cos\theta + f - mg \sin\phi = 0$$

Subtitusi nilai T

$$\frac{mgR \sin\phi}{H \sin\theta} \cos\theta + f - \; mg \sin\phi = 0$$

$$f = mg \sin\phi - \frac{mgR \sin\phi \cos\theta}{H \sin\theta}$$

$$f = mg \sin\phi \frac{H \sin\theta - R \cos\theta}{H \sin\theta}$$

Kemudian dari keseimbangan gaya untuk bola pada sumbu y akan kita peroleh pula

$$N - T \sin\theta - mg \cos\phi = 0$$

Subtitusi nilai T

$$N - \frac{mgR \sin\phi}{H \sin\theta} \sin\theta - mg \cos\phi = 0$$

$$N = \frac{mgR \sin\phi}{H} + mg \cos\phi \Longrightarrow N = mg \frac{R \sin\phi + H \cos\phi}{H}$$

Hubungan antara gaya normal N, gaya gesek f, dan koefisien gesek statik adalah

$$f \leq \mu_{\text{smin}} N$$

$$\mu_{\text{s}} \geq \frac{f}{N}$$

Subtitusi nilai f dan N

$$\mu_{\text{s}} \geq \frac{mg \sin\phi \dfrac{H \sin\theta - R \cos\theta}{H \sin\theta}}{mg \dfrac{R \sin\phi + H \cos\phi}{H}}$$

$$\mu_{\text{s}} \geq \frac{H \sin\phi \sin\theta - R \sin\phi \cos\theta}{R \sin\phi \sin\theta + H \cos\phi \sin\theta}$$

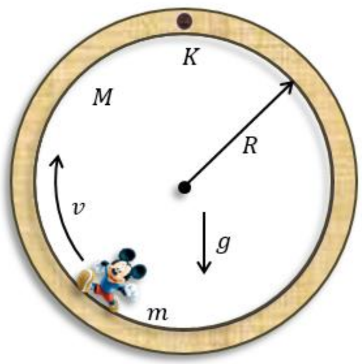
Bagi penyebut dan pembilang sis kanan dengan $\sin\phi \sin\theta$, sehingga akan kita dapatkan

$$\mu_{\mathrm{s}} \geq \frac{H - R\cot\theta}{R + H\cot\phi}$$

Maka koefisien gesek minimum agar bola dapat setimbang secara statik adalah

$$\mu_{\mathrm{smin}} = \frac{H - R\cot\theta}{R + H\cot\phi}$$

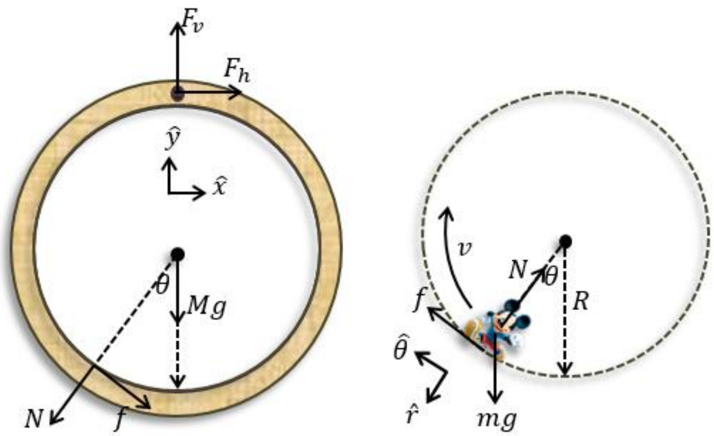
5. Sebuah cincin bermassa M dan berjari-jari R di engsel di titik K (salah satu titik pada keliling cincin) sehingga dapat berputar tanpa gesekan terhadap sumbu horizontal yang melalui titik tersebut. Dengan kelajuan berapa seekor tikus bermassa m harus berlari di permukaan dalam cincin supaya **cincin selalu diam**? Anggap permukaan dalam cincin sangat kasar sehingga kaki tikus tidak slip terhadap cincin. **(Binovatif)**



Solusi :

Ketika cincin selalu diam, resultan gaya dan torsi yang bekerja padanya haruslah bernilai nol. Untuk tikus, dia hanya memiliki percepatan arah radial yaitu percepatan sentripetal dan percepatan arah tangensialnya nol karena dia bergerak dengan kecepatan konstan v.

Berikut diagram gaya pada cincin dan tikus.



Tikus :

Hukum I Newton untuk gerak translasi arah $\hat{\theta}$ (atau arah tangensial, percepatan pada arah ini bernilai nol)

$$\sum \vec{F}_\theta = 0$$

$$f\hat{\theta} - mg\sin\theta\,\hat{\theta} = 0 \Longrightarrow f = mg\sin\theta \ldots (1)$$

Hukum II Newton untuk gerak translasi arah $\hat{r}$ (atau arah radial, percepatan pada arah ini adalah percepatan sentripetal yaitu $a_r = v^2/R$, ingat bahwa arahnya selalu menuju pusat rotasi atau berlawanan arah $\hat{r}$ atau bisa dikatakan juga pada arah $-\hat{r}$)

$$\sum \vec{F}_r = m\vec{a}_r$$

$$-N\hat{r} + mg\cos\theta\,\hat{r} = -m\frac{v^2}{R}\hat{r} \Longrightarrow N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \ldots (2)$$

Cincin :

Hukum I Newton untuk gerak rotasi arah $\hat{z}$ (sumbu z keluar bidang kertas menuju anda, arah torsi bisa ditentukan dengan aturan tangan kanan) atau keseimbangan torsi pada cincin terhadap pusat massanya.

$$\sum \vec{\tau}_z = 0$$

$$fR\hat{z} - F_hR\hat{z} = 0 \Longrightarrow f = F_h \ldots (3)$$

Hukum I Newton untuk gerak translasi arah $\hat{x}$

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$F_h\hat{x} - N\sin\theta\,\hat{x} + f\cos\theta\,\hat{x} = 0$$

$$F_h + f\cos\theta = N\sin\theta$$

Subtitusi persamaan (3)

$$f + f\cos\theta = N\sin\theta \Longrightarrow f(1+\cos\theta) = N\sin\theta$$

Subtitusi persamaan (1)

$$mg\sin\theta\,(1+\cos\theta) = N\sin\theta \Longrightarrow N = mg(1+\cos\theta) \ldots (4)$$

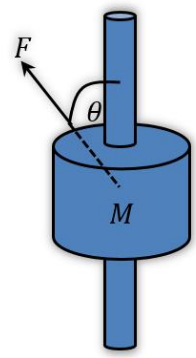
Subtitusi persamaan (4) ke (2)

$$mg(1+\cos\theta) - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

$$mg = m\frac{v^2}{R} \Longrightarrow v = \sqrt{gR}$$

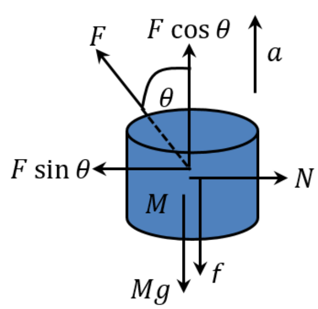
Dinamika dan Kalkulus: Solusi Persamaan Gerak dan Peninjauan Elemen Sistem

1. Sebuah benda bermassa M bergerak secara vertikal pada sebuah poros (seperti gambar di bawah) akibat pengaruh dari sebuah gaya F yang besarnya konstan namun arahnya berubah setiap waktu. Diketahui bahwa $\theta = bt$, dimana b merupakan sebuah konstanta dan t adalah waktu dalam detik . Jika koefisien gesek antara benda dan poros adalah μ_k dan bila benda itu bergerak dari keadaan diam (yaitu $\theta = 0^0$), tentukan besar gaya F yang menyebabkan benda berhenti setelah $\theta = \pi/2$. **(OSK Fisika 2017)**



Solusi :

Benda tersebut bergerak naik karena adanya komponen gaya F pada arah vertikal. Poros memberikan gaya normal ke kanan pada benda M sebagai akibat adanya komponen gaya F pada arah horizontal yang berarah ke kiri. Perhatikan diagram gaya yang bekerja pada benda M berikut!



Tinjau gaya arah horizontal

$$N - F\sin\theta = 0 \rightarrow N = F\sin\theta$$

Tinjau gaya arah vertikal

$$F\cos\theta - f - Mg = Ma$$

Gaya gesek yang bekerja adalah gaya gesek kinetik

$$f = \mu_k N = \mu_k F \sin\theta$$

Persamaan gerak benda M akan menjadi

$$F\cos\theta - \mu_k F \sin\theta - Mg = Ma$$

$$F(\cos\theta - \mu_k \sin\theta) - Mg = Ma$$

Subtitusi $\theta = bt$ dan $a = \dfrac{dv}{dt}$

$$F(\cos bt - \mu_k \sin bt) - Mg = M\frac{dv}{dt}$$

$$dv = \left(\frac{F}{M}(\cos bt - \mu_k \sin bt) - g\right)dt$$

Kemudian kita integralkan persamaan di atas. Kita gunakan batas bawah $v = 0$ ketika $t = 0$ dan batas atas $v = v(t)$ ketika $t = t$.

$$\int_0^{v(t)} dv = \int_0^t \left(\frac{F}{M}(\cos bt - \mu_k \sin bt) - g\right)dt$$

$$v(t) = \frac{F}{bM}(\sin bt + \mu_k \cos bt) - gt - \frac{F}{M}\mu_k$$

$$v(t) = \frac{F}{bM}\big(\sin bt + \mu_k(\cos bt - 1)\big) - gt$$

Pada saat $\theta = \pi/2$ atau $t = \pi/2b$, kecepatan benda M bernilai nol, $v(t) = 0$.

$$0 = \frac{F}{bM}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \mu_k\left(\cos\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) - g\frac{\pi}{2b}$$

$$\frac{F}{bM}(1 - \mu_k) = g\frac{\pi}{2b} \Longrightarrow F = \frac{Mg\pi}{2(1 - \mu_k)}$$

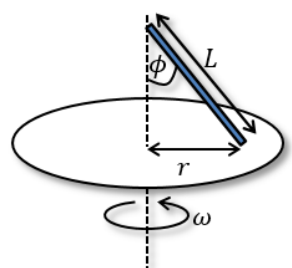
Di atas tadi kita telah menggunakan

$$\int_{t_1}^{t_2} \cos bt = \left[\frac{1}{b}\sin bt\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{b}\sin bt_2 - \frac{1}{b}\sin bt_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin bt = \left[-\frac{1}{b}\cos bt\right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{b}\cos bt_2 - \left(-\frac{1}{b}\sin bt_1\right) = \frac{1}{b}\sin bt_1 - \frac{1}{b}\cos bt_2$$

Bagi teman-teman yang belum terlalu mengerti mengenai integral, saya sangat anjurkan untuk membaca buku Kalkulus Jilid pertama mengenai diferensial dan integral.

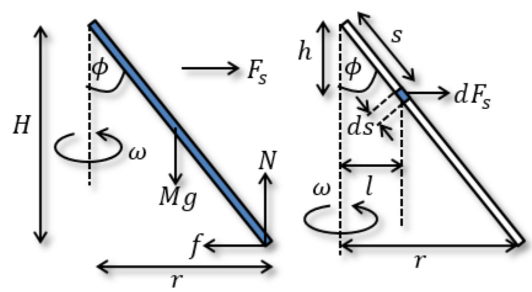
2. Terdapat sebuah cakram berputar dengan kecepatan sudut yang konstan mengelilingi sumbu simetrinya. Kemudian sebuah ba tang dengan panjang $L = 1\ m$ diletakkan di atas cakram pada arah radial yang sama dimana ujung bawahnya terletak pada jarak $r = 0{,}8\ m$ dan ujung atasnya berada di sumbu simetri cakram. Batang kemudian dilepaskan dan ikut berputar bersama cakram dengan mempertahankan posisinya seperti ini $(d\phi/dt = 0)$. Tentukan besar kecepatan sudut cakram! Gunakan percepatan gravitasi $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. **(Laszlo Holics)**



Solusi :

Pada soal ini, ada beberapa metode yang bisa kita gunakan yaitu metode gaya dan metode momentum sudut. Untuk sekarang akan kita bahas dengan metode gaya. Pembahasan menggunakan metode momentum sudut akan kita bahas pada bagian momentum sudut nantinya.

Perhatikan gambar di bawah ini!



Menggunakan Hukum I Newton pada arah horizontal dan vertikal akan kita dapatkan

Arah vertikal

$$N = Mg$$

Arah horizontal

$$f = F_s$$

Dengan F_s adalah gaya sentrifugal total yang bekerja pada batang, namun karena besarnya tidak konstan pada setiap segmen batang, kita harus menggunakan sedikit cara yang berbeda. Dalam hal ini kita akan menggunakan integral. Kita tinjau sebuah segmen batang sepanjang ds yang berjarak s dari puncak batang. Massa per satuan panjang batang konstan dan besarnya adalah

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

Maka massa segmen batang sepanjang ds adalah

$$m = \lambda ds = \frac{M}{L} ds$$

Gaya sentrifugal yang bekerja pada segmen batang ini adalah

$$dF_s = m\omega^2 l$$

Dengan menggunakan kesebangunan akan kita dapatkan hubungan

$$\frac{l}{r} = \frac{s}{L} \Longrightarrow l = \frac{s}{L} r$$

Sehingga

$$dF_s = \left(\frac{M}{L} ds\right) \omega^2 \left(\frac{s}{L} r\right)$$

$$dF_s = \frac{M\omega^2}{L^2} s ds$$

Kemudian kita intergralkan untuk mendapatkan gaya sentrifugal totalnya dengan batas bawah 0 dan batas atas L.

$$F_s = \frac{M\omega^2 r}{L^2} \int_0^L s ds$$

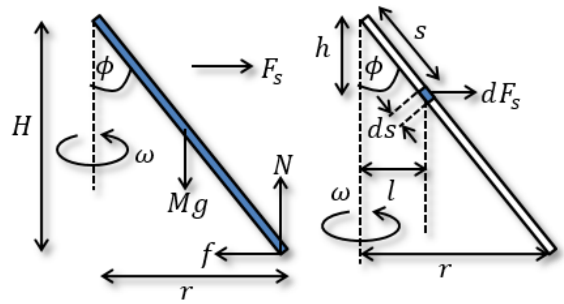
$$F_s = \frac{M\omega^2 r}{L^2} \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^L$$

$$F_s = \frac{1}{2} M\omega^2 r$$

Maka gaya gesek yang bekerja pada batang adalah

$$f = \frac{1}{2} M\omega^2 r$$

Selanjutnya kita gunakan keseimbangan torsi terhadap puncak batang. Di sini gaya sentrifugal juga memberikan torsi yang tidak konstan pada setiap segmen batangnya namun total torsi akibat gaya sentrifugal cenderung memutar batang berlawanan arah jarum jam sehingga bisa kita gantikan sebagai sebuah torsi positif sebesar τ.



Menggunakan Hukum I Newton tentang rotasi akan kita dapatkan

$$\tau - Mg\frac{r}{2} - fH + Nr = 0 \ldots (1)$$

Kita perlu menghitung besar torsi total akibat gaya sentrifugal terhadap puncak batang. Kita tinjau sebuah segmen batang sepanjang ds dimana ds sangat kecil dan berjarak s dari puncak batang. Torsi pada segmen batang ini adalah

$$d\tau = dF_s h$$

Dengan kesebangunan akan kita dapatkan hubungan

$$\frac{h}{H} = \frac{s}{L} \Longrightarrow h = \frac{s}{L}H$$

maka

$$d\tau = \left(\frac{M\omega^2 r}{L^2} s ds\right)\frac{s}{L}H$$

$$d\tau = \frac{M\omega^2 H}{L^3} s^2 ds$$

Kita integral kan untuk mendapatkan torsi totalnya dengan batas bawah 0 dan batas atas L

$$\tau = \frac{M\omega^2 rH}{L^3}\int_0^L s^2 ds$$

$$\tau = \frac{M\omega^2 rH}{L^3}\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^L$$

$$\tau = \frac{1}{3} M\omega^2 rH$$

Subtutusi hasil-hasil yang sudah kita dapatkan ke persamaan (1)

$$\frac{1}{3} M\omega^2 rH - Mg\frac{r}{2} - \frac{1}{2} M\omega^2 rH + Mgr = 0 \Big| \times 6$$

$$2M\omega^2 rH - 3Mgr - 3M\omega^2 rH + 6Mgr = 0$$

$$M\omega^2 rH = 3Mgr$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{H}$$

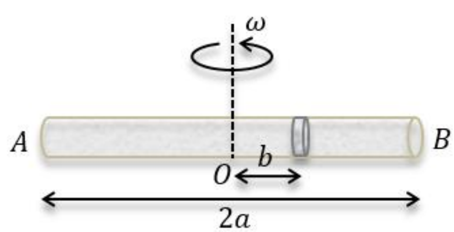
Dengan rumus phytagoras kita akan dapatkan besar H

$$H = \sqrt{L^2 - r^2}$$

Maka kecepatan sudut cakram adalah

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\sqrt{L^2 - r^2}}} \Longrightarrow \omega = 5\sqrt{2} \text{ rad/s} \approx 7{,}07 \text{ rad/s}$$

3. Suatu tabung silinder AOB dengan panjang $2a$ berotasi dengan kecepatan sudut konstan ω relatif terhadap suatu sumbu vertikal yang melalui titik pusat silinder O. Di dalam tabung pada jarak b dari O terdapat sebuah partikel yang pada awalnya berada pada keadaan diam. Jika diasumsikan tidak ada gesekan yang bekerja, waktu yang dibutuhkan partikel agar sampai ke ujung tabung adalah... **(ON-MIPA)**



Solusi :

Partikel tersebut mendapatkan gaya sentrifugal yang berarah radial keluar. Dengan Hukum II Newton untuk arah radial akan kita dapatkan

$$m\omega^2 r = ma_r$$

$$\omega^2 r = \frac{dv_r}{dt}\frac{dr}{dr} = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv_r}{dr} v_r$$

$$v_r dv_r = \omega^2 r dr$$

Kita cari fungsi kecepatan radial partikel sebagai fungsi r dengan mengintegralkan persamaan di atas untuk v_r dari 0 (karena awalnya diam) sampai v_r dan untuk r dari b (jarak awal dari pusat rotasi) sampai r.

$$\int_0^{v_r} v_r dv_r = \omega^2 \int_b^r r dr$$

$$\frac{{v_r}^2}{2} = \omega^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right)$$

$$v_r = \omega\sqrt{r^2 - b^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \omega\sqrt{r^2 - b^2}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \omega dt$$

Untuk mendapatkan waktu tempuh partikel sampai tiba di ujung tabung kita integralkan persamaan di atas untuk r dari b sampai a dan untuk t dari 0 sampai T (ini adalah waktu tempuh yang dimaksud).

$$\int_b^a \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \omega \int_0^T dt$$

$$\int_b^a \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \omega T$$

$$T = \frac{1}{\omega} \int_b^a \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

Untuk mendapatkan integral di atas kita perlu melakukan subtitusi fungsi hiperbolik.

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ dan } \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \rightarrow \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$$

Bukti :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{2x} + 2 + 2 + e^{-2x} - e^{-2x})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Untuk integral di atas kita subtitusi $r = b\cosh x$ maka $dr = b\sinh x \; dx$

Bukti :

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}e^{-x}\right)\frac{1}{2}(e^x + (-1)e^{-x})$$

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

Kembali ke soal

$$r^2 - b^2 = b^2\cosh^2 x - b^2 = b^2(\cosh^2 x - 1) = b^2\sinh^2 x$$

Maka

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \int \frac{b\sinh x \; dx}{\sqrt{b^2\sinh^2 x}} = \int dx = x$$

$$r = b\cosh x \rightarrow x = \cosh^{-1}\left(\frac{r}{b}\right)$$

$$T = \frac{1}{\omega}\int_b^a \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \frac{1}{\omega}\left[\cosh^{-1}\left(\frac{r}{b}\right)\right]_b^a = \frac{1}{\omega}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \underbrace{\cosh^{-1}\left(\frac{b}{b}\right)}_{0}\right)$$

$$T = \frac{1}{\omega}\cosh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$